

IV Appello del corso di Geometria II N.O - 12 Settembre 2002

Risolvere i seguenti esercizi dando brevi spiegazioni dei procedimenti e teoremi utilizzati.

Esercizio 1) Sia $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ l'operatore definito da

$$T : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -1 \\ 7 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Determinare una base di \mathbb{C}^3 in cui la matrice associata a T sia in forma di Jordan e trovare tale forma.

Esercizio 2) Sia \mathbb{A}^2 il piano affine reale con assegnate coordinate affini (x, y) . Scrivere l'equazione del fascio di coniche tangenti alla parabola $y + x^2 = 0$ in $(0, 0)$ e tangenti alla retta $x + y = 2$ in $(1, 1)$. Determinare poi la conica del fascio che passa per $(1, 0)$ e quella che passa per $(0, 1)$. Che tipo di coniche sono (secondo la classificazione affine) ?

Esercizio 3) Sia $V = \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$ lo spazio vettoriale complesso delle matrici quadrate 2×2 . Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si definisca $W = \{X \in V : AX = X\}$.

1. Provare che W è un sottospazio vettoriale di V e determinarne la dimensione.
2. Determinare una rappresentazione implicita di W .
3. Trovare una base di W ed estenderla ad una base di V .
4. Scrivere la matrice A in coordinate rispetto alla base scelta in 3. È possibile trovare una base di V data dall'estensione di una base di W per cui almeno tre delle coordinate di A in tale base siano non nulle?