**GEOMETRIA 1 — 2002/2003**

*Professor Stefano TRAPANI*

Prima verifica scritta — 21/11/2003

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

## Esercizio 1

Nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$ dotato di un riferimento cartesiano ortogonale monometrico $RC(O; x, y, z)$, si considerino la retta $r$ di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ 3\,x + y + z = 0 \end{cases} \quad \text{e la retta } s \text{ di equazioni parametriche } \quad s : \begin{cases} x = 1 + 2\,t \\ y = 2 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \, . \\ z = t \end{cases}$$

*(a)* Determinare equazioni cartesiane della retta $\ell$ incidente $r$ nel punto $A := (0, 1, -1)$, perpendicolare ad $r$ e complanare con $s$.

*(b)* Calcolare l'area del triangolo con vertici i punti $A$, $B := \ell \cap s$ e $C := (1, 2, 0)$.

## Esercizio 2

Per ogni $k \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice

$$A_k := \begin{pmatrix} 1-k & 0 & -1 \\ 2\,k-2 & k-2 & 3\,k-4 \\ 4-k & 1+k & 2-2\,k \end{pmatrix} .$$

*(a)* Usando il metodo di eliminazione di Gauss — precisando i moltiplicatori ed i pivots utilizzati — ridurre la matrice $A_k$ a scala e determinarne il rango.

*(b)* Spiegare se le matrici $A_1$ e $A_2$ siano invertibili oppure no. In caso negativo spiegare il perché, in caso affermativo calcolarne l'inversa.

## Esercizio 3

Nello spazio vettoriale numerico $\mathcal{V} := \mathbb{R}^3$, si considerino i tre vettori

$$\mathbf{v}_1(\lambda) := (3\,\lambda - 1, 2\,\lambda, \lambda + 2) \, , \quad \mathbf{v}_2(\lambda) := (4, -1, -2) \, , \quad \mathbf{v}_3(\lambda) := (5\,\lambda - 11, 4\,\lambda + 3, 3\,\lambda + 7)$$

dipendenti dal parametro $\lambda \in \mathbb{R}$. Sia inoltre $\mathcal{W}_\lambda := Span\big(\{\mathbf{v}_1(\lambda), \mathbf{v}_2(\lambda)\}\big)$ il sottospazio vettoriale di $\mathcal{V}$ generato da $\mathbf{v}_1(\lambda)$ e $\mathbf{v}_2(\lambda)$.

*(a)* Determinare tutti i valori di $\lambda$, se esistono, per i quali l'insieme $\{\mathbf{v}_1(\lambda), \mathbf{v}_2(\lambda)\}$ sia una base di $\mathcal{W}_\lambda$.

*(b)* Determinare tutti i valori di $\lambda$, se ne esistono, per i quali $\mathbf{v}_3(\lambda)$ appartenga a $\mathcal{W}_\lambda$.

*(c)* Determinare tutti i valori di $\lambda$, se ne esistono, per i quali $\mathbf{v}_3(\lambda)$ sia perpendicolare a $\mathcal{W}_\lambda$ (cioè sia perpendicolare ad ogni vettore $\mathbf{w} \in \mathcal{W}_\lambda$).