GEOMETRIA e ALGEBRA
CdL in Informatica — a.a. 2006/2007

Prof. Fabio GAVARINI

Test del 03/05/2007

con soluzioni

· ·

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

· · · · · · · · · ∗ · · · · · · · · ·

[1] Verificare che i vettori

$$v_1 := (1,7,10) \; , \qquad v_2 := (3,0,6) \; , \qquad v_3 := (7,7,22)$$

nello spazio vettoriale $\mathbb{Q}^3$ sono linearmente dipendenti.

Determinare inoltre tutte le terne $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{Q}^3$ tali che

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \quad .$$

<u>Soluzione</u>*:* I vettori dati sono linearmente dipendenti se e soltanto se la matrice

$$A := \big(v_1 \, , \, v_2 \, , \, v_3\big) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 7 & 0 & 7 \\ 10 & 6 & 22 \end{pmatrix}$$

che ha per colonne i vettori v_1, v_2 e v_3, ha rango minore del numero dei vettori, cioè minore di 3. Inoltre, le terne $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{Q}^3$ richieste sono tutte e sole le soluzioni del sistema lineare (di tre equazioni in tre incognite)

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 \, .$$

Per calcolare il rango $rg(A)$ e per risolvere il sistema $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ operiamo una riduzione a scala (tramite eliminazione di Gauss) della matrice A. Il procedimento dà

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 7 & 0 & 7 \\ 10 & 6 & 22 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -21 & -42 \\ 0 & -24 & -48 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -21 & -42 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S$$

dove S è una matrice a scala, i cui pivot sono 1 e -21. Pertanto abbiamo

$$rg(A) \;=\; rg(S) \;=\; \#(\text{pivot di } S\,) \;=\; 2 \lneqq 3$$

e quindi v_1, v_2 e v_3 sono linearmente dipendenti.

Per risolvere il sistema lineare (omogeneo) $A\,\mathbf{x} \;=\; \mathbf{0}$ procediamo tramite riduzione a scala (tramite eliminazione di Gauss) della matrice completa del sistema, cioè $\big(A\big|\mathbf{0}\big)$. Il procedimento già visto dà

$$\big(A\big|\mathbf{0}\big) \;=\; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 7 & 0 \\ 7 & 0 & 7 & 0 \\ 10 & 6 & 22 & 0 \end{array}\right) \quad \mapsto \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & -21 & -42 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \;=\; \big(T\big|\mathbf{0}\big)$$

A questo punto, il sistema si può risolvere usando la variabile libera (perché *non ha* davanti un pivot!) x_3 come parametro, e risolvendo il sistema nelle restanti due variabili. In altre parole, passiamo dal sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3\,x_2 + 7\,x_3 \;=\; 0 \\ \quad -21\,x_2 - 42\,x_3 \;=\; 0 \\ \qquad\qquad\quad 0 \;=\; 0 \end{cases} \quad \text{al sistema} \quad \circledcirc : \begin{cases} x_1 + 3\,x_2 \;=\; 0 - 7\,x_3 \;\big(= -7\,x_3\big) \\ \quad -21\,x_2 \;=\; 0 + 42\,x_3 \;\big(= 42\,x_3\big) \\ \qquad\quad 0 \;=\; 0 \end{cases}$$

che corrisponde alla manipolazione della matrice completa

$$\big(T\big|\mathbf{0}\big) \;=\; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & -21 & -42 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \mapsto \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -7 \\ 0 & -21 & 42 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Infine, la risoluzione all'indietro del sistema $\circledcirc$ permette di trovare le soluzioni

$$\big(\alpha_1\,,\,\alpha_2\,,\,\alpha_3\big) \;=\; \big(-\alpha, -2\,\alpha, \alpha\big) \;\;, \qquad \forall\;\alpha \in \mathbb{Q}\;\;.$$

N.B.: è possibile anche semplificare i calcoli, ad esempio come segue.

Per la prima domanda, osserviamo che il rango di una matrice non cambia se moltiplichiamo una riga o una colonna della matrice stessa per uno scalare non nullo. Ad esempio, nel nostro caso possiamo moltiplicare la seconda riga per 1/7 e la terza per 1/2, e poi possiamo moltiplicare la seconda colonna per 1/3. Queste operazioni trasformano la matrice A nella matrice

$$A' \;:=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

che ci dà $rg(A) = rg\big(A'\big)$, per cui possiamo limitarci a calcolare $rg\big(A'\big)$.

Per calcolare $rg\big(A'\big)$ operiamo una riduzione a scala (tramite eliminazione di Gauss) di A' come in precedenza, e precisamente

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 7 & 0 & 7 \\ 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & -4 & -24 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S'$$

dove S è una matrice a scala, i cui pivot sono 1 e -1. Pertanto abbiamo

$$rg(A) = rg\big(A'\big) = rg\big(S'\big) = \#(\text{pivot di } S'\,) = 2 \lneqq 3$$

e quindi concludiamo, come prima, che v_1, v_2 e v_3 sono linearmente dipendenti.

D'altra parte, le terne $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{Q}^3$ tali che $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ come sappiamo sono tutte e sole le soluzioni del sistema lineare $\circledast : \; A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ora, tale sistema è equivalente al sistema

$$\circledast'' : \; A''\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \text{con} \qquad A'' := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

(perché passare dal sistema $\circledast$ al sistema $\circledast$ corrisponde semplicemente a moltiplicare la seconda equazione per 1/7 e la terza per 1/2), ma *non* è equivalente al sistema $\circledast : \; A'\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Piuttosto, la relazione corretta tra i due sistemi $\circledast$ e $\circledast'$ è

$$\big(\alpha_1\,,\,\alpha_2\,,\,\alpha_3\big) \text{ è soluz. di } \circledast \iff \big(\alpha'_1\,,\,\alpha'_2\,,\,\alpha'_3\big) = \big(\alpha_1\,,\,3\,\alpha_2\,,\,\alpha_3\big) \text{ è soluz. di } \circledast'$$

Ora, il sistema omogeneo $\circledast'$ si può risolvere come già fatto per $\circledast$ in precedenza: lo stesso procedimento dà

$$\big(A'\big|\mathbf{0}\big) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 11 & 0 \end{array}\right) \quad \mapsto \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \big(T'\big|\mathbf{0}\big)$$

A questo punto, il sistema si risolve usando la variabile libera x_3 come parametro, e risolvendo rispetto alle altre due: in altri termini, passiamo dal sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 7\,x_3 = 0 \\ \quad -x_2 - 6\,x_3 = 0 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases} \quad \text{al sistema} \quad \circledcirc' : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 - 7\,x_3 \;\big(= -7\,x_3\big) \\ \quad -x_2 = 0 + 6\,x_3 \;\big(= 6\,x_3\big) \\ \qquad 0 = 0 \end{cases}$$

la cui risoluzione all'indietro dà le soluzioni $\big(\alpha'_1\,,\,\alpha'_2\,,\,\alpha'_3\big) = \big(-\alpha', -6\,\alpha', \alpha'\big)$, per ogni $\alpha' \in \mathbb{Q}$, da cui infine con la relazione $\big(\alpha_1\,,\,\alpha_2\,,\,\alpha_3\big) = \big(\alpha'_1\,,\,\alpha'_2/3\,,\,\alpha'_3\big)$ ritroviamo le soluzioni di $\circledast$ già ottenute in precedenza. $\square$

[2] Sia $\mathbb{K}$ il campo $\mathbb{Q}$ oppure il campo $\mathbb{Z}_5$. Si considerino i vettori

$$v_1 := (1,2,3)\ , \qquad v_2 := (2,-1,1)\ , \qquad v_3 := (3,2,5)\ , \qquad v_4 := (2,-4,2)$$

nello spazio vettoriale $\mathbb{K}^3$, sia $W := Span_{\mathbb{K}}(v_1,v_2,v_3,v_4)$ il sottospazio vettoriale da essi generato in $\mathbb{K}^3$, e sia infine $b := (1,0,5) \in \mathbb{K}^3$.

(a) Calcolare $dim_{\mathbb{K}}(W)$.

(b) Determinare una base B di W sul campo $\mathbb{K}$.

(c) Determinare se b appartenga o meno al sottospazio W. In caso affermativo, trovare un'espressione di b come combinazione lineare dei vettori della base B determinata in *(b)*.

<u>Soluzione</u>*:* Consideriamo la matrice A in $M_{3,4}(\mathbb{K})$ le cui colonne siano (nell'ordine) i vettori v_1, v_2, v_3 e v_4, e la matrice $M := \big(A\,\big|\,b\big)$ in $M_{3,5}(\mathbb{K})$, le cui colonne sono (nell'ordine) i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 e b. Dunque

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \ , \qquad M := \big(A\,\big|\,b\big) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Ora riduciamo in forma a scala tali matrici tramite il procedimento di eliminazione di Gauss. È sufficiente lavorare su M, il che ci dà

$$M = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 5 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -8 & -2 \\ 0 & -5 & -4 & -4 & 2 \end{array}\right) \mapsto$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) = \Big(\widetilde{A}\,\Big|\,\widetilde{b}\,\Big) =: \widetilde{M}$$

Ora, la matrice $\widetilde{M}$ ha forma a scala. Quali siano i suoi pivot, però, dipende dal campo $\mathbb{K}$ considerato! I due casi sono:

$\mathbb{K} = \mathbb{Q}$: in tal caso i pivot sono: **1** (in colonna 1), **-5** (in colonna 2) e **4** (in colonna 4). Pertanto, abbiamo che

(a)–(c) $\quad rg(A) = 3 = rg(M) = rg\big(\big(A\,\big|\,b\big)\big) \implies dim_{\mathbb{K}}(W) = rg(A) = 3\,,\ b \in W$

(b) $\qquad B := \{v_1, v_2, v_4\}$ è base di W

$\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$: in tal caso i pivot sono: **1** (in colonna 1), **-4 = 1** (in colonna 3) e **4** (in colonna 4). Pertanto, abbiamo che

(a)–(c) $\quad rg(A) = 3 = rg(M) = rg\big(\big(A\,\big|\,b\big)\big) \implies dim_{\mathbb{K}}(W) = rg(A) = 3\,,\ b \in W$

(b) $\qquad B := \{v_1, v_3, v_4\}$ è base di W

In entrambi i casi, resta soltanto da trovare un'espressione di b come combinazione lineare dei vettori della rispettiva base B.

Quest'ultimo problema corrisponde a trovare una terna $\big(\bar{x}_1, \bar{x}_i, \bar{x}_4\big) \in \mathbb{K}^3$ tale che

$$\circledcirc : \; \bar{x}_1 \, v_1 \, + \, \bar{x}_i \, v_i \, + \, \bar{x}_4 \, v_4 \, = \, b$$

dove $i = 2$ oppure $i = 3$ a seconda che sia $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$. Sviluppando, la $\circledcirc$ corrisponde ad un sistema $\circledast : C\mathrm{x} = b$ in cui $\mathrm{x} = (x_1, x_i, x_4)^T$ e $C = \big(\widetilde{A}^1 \, \widetilde{A}^i \, \widetilde{A}^4\big)$ è la matrice di tre righe e tre colonne le cui colonne sono (nell'ordine) la prima, la i-esima e la quarta colonna della matrice $\widetilde{A}$. La terna (x_1, x_i, x_4) sarà dunque la soluzione (unica!) di tale sistema $\circledast$, che si può trovare tramite risoluzione all'indietro, oppure tramite triangolarizzazione di Gauss inversa. In conclusione, le soluzioni sono

$$\begin{cases} \big(\bar{x}_1\, , \, \bar{x}_2\, , \, \bar{x}_4\big) \; = \; \big(7/5\, , \, -6/5\, , \, 1\big) & \text{se} \quad \mathbb{K} = \mathbb{Q} \\ \big(\bar{x}_1\, , \, \bar{x}_3\, , \, \bar{x}_4\big) \; = \; \big(2\, , \, -3/2\, , \, 1\big) \; = \; \big(1\, , \, 1\, , \, 1\big) & \text{se} \quad \mathbb{K} = \mathbb{Z}_5 \end{cases}$$

I calcoli però saranno diversi nei due casi, perché diversa è la matrice del sistema!

N.B.: è possibile anche semplificare il problema, facendo i calcoli una sola volta per entrambi i casi, procedendo come segue.

La posizione delle diverse colonne nella matrice a scala $\widetilde{A}$ corrisponde all'analoga posizione delle colonne della matrice iniziale A da cui è stata ottenuta $\widetilde{A}$. Ora, le colonne di A per costruzione sono i vettori v_1, v_2, v_3 e v_4, presi in quest'ordine: cambiando l'ordine di tali vettori cambieranno allo stesso modo le colonne di A, e corrispondentemente quelle di $\widetilde{A}$. Partiamo allora da quest'ultima conseguenza — cioè dal riordinamento delle colonne di $\widetilde{A}$ — per *scegliere* in che modo riordinare i vettori v_1, v_2, v_3 e v_4.

Nella matrice $\widetilde{A}$, il coefficiente -5 in posizione (2,2) — cioè: "in riga 2, colonna 2" — è diverso da 0 se $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, ma invece è uguale a 0 se $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$. Invece, il coefficiente -4 in posizione (2,3) — cioè: "in riga 2, colonna 3" — *è diverso da 0 in entrambi i casi.* Pertanto, desiderando avere *questo* coefficiente (diverso da 0) in posizione (2,2), cioè sempre sulla riga 2 *ma sulla colonna 2 invece che 3*, dovremmo scambiare le colonne 2 e 3 di $\widetilde{M}$. Allora, scambiamo l'ordine dei vettori v_2 e v_3 all'inizio, cioè consideriamo la matrice A' che abbia per colonne i vettori $v'_1 := v_1$, $v'_2 := v_3$, $v'_3 := v_2$ e $v'_4 := v_4$, *presi in quest'ordine.* Effettuando sulla matrice $M' := \big(A' \,\big|\, b\big)$ le stesse operazioni elementari (sulle righe) di prima otteniamo allora una triangolarizzazione di Gauss

$$M' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -4 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -8 & -2 \\ 0 & -4 & -5 & -4 & 2 \end{array}\right) \mapsto$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) = \left(\widetilde{A'} \,\middle|\, \widetilde{b}\,\right) =: \widetilde{M'}$$

Adesso, la matrice a scala $\widetilde{M'}$ ha per pivot i coefficienti **1** (in colonna 1), **-4 = 1** (in colonna 2) e **4** (in colonna 4), *sia per* $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ *che per* $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$. Pertanto, concludiamo che, *in entrambi i casi*,

$$B := \{v_1', v_2', v_4'\} = \{v_1, v_3, v_4\} \text{ è base di } W$$

Infine, per trovare un'espressione di b come combinazione lineare dei vettori della suddetta base B, bisogna trovare una terna $(\bar{x}_1, \bar{x}_3, \bar{x}_4) \in \mathbb{K}^3$ tale che

$$\circledcirc : \bar{x}_1 v_1 + \bar{x}_3 v_3 + \bar{x}_4 v_4 = b$$

il che corrisponde a risolvere il sistema (3 per 3) $\circledast : C\mathrm{x} = \mathbf{0}$ con matrice dei coefficienti $C = \left(\widetilde{A}^1\, \widetilde{A}^i\, \widetilde{A}^4\right)$ le cui colonne sono (nell'ordine) la prima, terza e la quarta colonna di $\widetilde{A}$. In pratica, è il sistema precedentemente considerato nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$. La soluzione (unica!) di tale sistema si può trovare tramite risoluzione all'indietro, o mediante triangolarizzazione di Gauss inversa, ed è

$$\left(\bar{x}_1\,,\, \bar{x}_3\,,\, \bar{x}_4\right) = \left(2\,,\, -3/2\,,\, 1\right)$$

che nel caso in cui $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$ si può riscrivere — come prima — come

$$\left(\bar{x}_1\,,\, \bar{x}_3\,,\, \bar{x}_4\right) = \left(2\,,\, -3/2\,,\, 1\right) = \left(2\,,\, 2/2\,,\, 1\right) = \left(2\,,\, 1\,,\, 1\right) \quad . \quad \square$$

[3] Sia $\mathbb{K}$ il campo $\mathbb{Q}$ oppure il campo $\mathbb{Z}_5$. Si considerino i vettori

$$v_1(t) := \big(t, t, 0, t\big)\ , \qquad v_2(t) := \big(1, 2\,t^2 - 1, 3\,t^2 - 1, t^2\big)$$
$$v_3(t) := \big(2, 2, 1 - t, 3 - t\big)\ , \qquad v_4(t) := \big(3, 3, 0, 5\big)$$

nello spazio vettoriale $\mathbb{K}^4$, al variare di $t \in \mathbb{K}$, e sia $W(t) := Span_{\mathbb{K}}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ il sottospazio vettoriale da essi generato in $\mathbb{K}^4$.

(a) Calcolare $dim_{\mathbb{K}}\big(W(t)\big)$.

(b) Determinare una base B di $W(t)$ sul campo $\mathbb{K}$.

<u>*Soluzione*</u>*:* Consideriamo la matrice $A(t) \in M_{4,4}(\mathbb{K})$ le cui colonne siano (nell'ordine) i vettori $v_1(t)$, $v_2(t)$, $v_3(t)$ e $v_4(t)$, cioè

$$A(t) := \begin{pmatrix} t & 1 & 2 & 3 \\ t & 2\,t^2-1 & 2 & 3 \\ 0 & 3\,t^2-1 & 1-t & 0 \\ t & t^2 & 3-t & 5 \end{pmatrix}$$

Allora $dim_{\mathbb{K}}\big(W(t)\big) = rg\big(A(t)\big)$, quindi calcoliamo il rango di $A(t)$ riducendola a scala e contando il numero di pivot. Inoltre, le posizioni (delle colonne) in cui si troveranno tali pivot, siano $j_1, \dots, j_r$, ci diranno che i corrispondenti vettori $v_{j_1}(t)$, $\dots$, $v_{j_r}(t)$ formano una base di $W(t)$.

Il procedimento di triangolarizzazione di Gauss ci dà:

Sottraendo la 1ª riga alla 2ª e alla 4ª si ottiene

$$A(t) := \begin{pmatrix} t & 1 & 2 & 3 \\ t & 2\,t^2-1 & 2 & 3 \\ 0 & 3\,t^2-1 & 1-t & 0 \\ t & t^2 & 3-t & 5 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} t & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2\,\big(t^2-1\big) & 0 & 0 \\ 0 & 3\,t^2-1 & 1-t & 0 \\ 0 & t^2-1 & 1-t & 2 \end{pmatrix} =: A^{(1)}(t)$$

Ora, **se** $t^2 - 1 \neq 0$, **cioè se** $t \neq \pm 1$, allora il coefficiente di $A^{(1)}(t)$ in posizione (2,2), precisamente $a^{(1)}_{2,2}(t) = 2\,\big(t^2-1\big)$, è diverso da 0, e *quindi possiamo sceglierlo come pivot*. Con tale scelta, sommando alla 3ª e alla 4ª riga di $A^{(1)}(t)$ la 2ª riga, si ottiene

$$A^{(1)}(t) := \begin{pmatrix} t & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2\,\big(t^2-1\big) & 0 & 0 \\ 0 & 3\,t^2-1 & 1-t & 0 \\ 0 & t^2-1 & 1-t & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2\,\big(t^2-1\big) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & 2 \end{pmatrix} =: A^{(2)}(t)$$

e osserviamo che nella matrice $A^{(2)}(t)$ il coefficiente $1–t$ in posizione (3,3) **è diverso da 0**, perché stiamo supponendo che $t \neq \pm 1$. Pertanto possiamo scegliere tale coefficiente come nuovo pivot, e effettuare il prossimo passo sottraendo la 3ª riga di $A^{(2)}(t)$ alla 4ª, il che ci dà

$$A^{(2)}(t) := \begin{pmatrix} t & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2\left(t^2-1\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2\left(t^2-1\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =: A^{(3)}(t)$$

Ora, la matrice $A^{(3)}(t)$ ha forma triangolare superiore. In più

se $t \notin \{-1,0,+1\}$**, allora** $A^{(3)}(t)$ **è a scala, con pivot** t, $2\left(t^2-1\right)$, $1-t$, 2, quindi

$$\begin{aligned} dim_{\mathbb{K}}\big(W(t)\big) \; &= \; rg\big(A(t)\big) \; = \; \#\text{pivot} \; = \; 4 \quad , \\ B(t) \; &:= \; \big\{\, v_1(t)\,,\, v_2(t)\,,\, v_3(t)\,,\, v_4(t) \,\big\} \;\text{ è base di }\; W(t) \quad . \end{aligned}$$

Se invece $t \in \{-1,0,+1\}$, allora bisogna fare un'analisi differenziata, come segue.

Se $t \in \{-1,+1\}$, allora il primo passo, cioè $A(t) \mapsto A^{(1)}(t)$, è ancora valido (ché comunque $t = \pm 1 \neq 0$). Proseguendo con l'eliminazione di Gauss, troviamo

$$A(t) \;\mapsto\; A^{(1)}(t) \;=\; \begin{pmatrix} t & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)} \begin{pmatrix} t & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: A^{[2]}(t)$$

scambiando le righe secondo la permutazione $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, e infine abbiamo, secondo i casi,

$$A^{[2]}(+1) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad A^{[2]}(-1) \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pertanto, si ha

$$\begin{aligned} dim_{\mathbb{K}}\big(W(+1)\big) \; &= \; rg\big(A(+1)\big) \; = \; rg\Big(A^{[2]}(+1)\Big) \; = \; 3 \quad , \\ B(+1) \; &:= \; \big\{\, v_1(+1)\,,\, v_2(+1)\,,\, v_4(+1) \,\big\} \;\text{ è base di }\; W(+1) \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dim_{\mathbb{K}}\big(W(-1)\big) \; &= \; rg\big(A(-1)\big) \; = \; rg\Big(A^{[2]}(-1)\Big) \; = \; 3 \quad , \\ B(-1) \; &:= \; \big\{\, v_1(-1)\,,\, v_2(-1)\,,\, v_3(-1) \,\big\} \;\text{ è base di }\; W(-1) \quad . \end{aligned}$$

Infine, **per** $t = 0$ **si ha**

$$A(0) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \;\mapsto\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \;\mapsto\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \;\mapsto$$

$$\mapsto\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;, \quad \textit{uguale a} \; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{se} \;\; \mathbb{K} = \mathbb{Z}_5 \; .$$

Quindi

$$\begin{gathered} dim_{\mathbb{K}}\big(W(0)\big) \;=\; rg\big(A(0)\big) \;=\; \#\text{pivot} \;=\; 3 \quad , \\ B(0) \;:=\; \big\{\, v_2(0)\,,\, v_3(0)\,,\, v_4(0) \,\big\} \;\; \text{è base di} \;\; W(0) \quad . \qquad \square \end{gathered}$$