GEOMETRIA ed ALGEBRA
CdL in Informatica — a.a. 2006/2007
Prof. Fabio GAVARINI
Appello del 29 Gennaio 2008

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

. . . . $*$ . . . .

[1] Considerata in $Mat_{4\times4}(\mathbb{Q})$ la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

si calcolino:

(a) tutte le potenze M^n $(n \in \mathbb{N})$ di M;
(b) il polinomio caratteristico di M;
(c) tutti gli autovalori di M (in $\mathbb{Q}$ oppure in $\mathbb{C}$).

[2] Sia data l'applicazione lineare

$$L_A\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 , \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

in cui " $\cdot$ " indica il prodotto righe per colonne.

(a) Dimostrare che l'applicazione $L_A^2 := L_A \circ L_A$ è iniettiva.
(b) Determinare la matrice $A' \in Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$ che esprime l'applicazione L_A rispetto alla base $\mathcal{B} := \big\{(1,0,-1),(0,1,1),(2,0,1)\big\}$ di $\mathbb{R}^3$.

[3] A partire dal sistema di generatori lineari

$$\big\{(3,2,1,0)\,,\,(0,1,2,3)\,,\,(1,1,1,1)\,,\,(1,-1,1,-1)\big\}$$

dello spazio vettoriale $\mathbb{Q}^4$, se ne estragga una base, da indicare con $\mathcal{B}$.

Si verifichi poi quali dei vettori $(1,1,-1,-1)$, $(1,0,0,1)$ appartengano al sottospazio generato da $\mathcal{B}$, e si determinino le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ di tali vettori.

[4] Si consideri la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in Mat_{4\times4}(\mathbb{Q}) .$$

(a) Calcolare il determinante di A.
(b) Determinare se la matrice A sia invertibile oppure no.
(c) Nel caso in cui A non sia invertibile, si determini l'insieme di tutti i vettori $v \in \mathbb{Q}^4$ tali che $A\,v = (0,0,0,0)^T$. Nel caso in cui invece A sia invertibile, si calcoli la matrice inversa A^{-1}.