GEOMETRIA ed ALGEBRA
CdL in Informatica — a.a. 2006/2007

Prof. Fabio GAVARINI

Appello del 26 Giugno 2007

testo e svolgimento

$\cdots\cdots\cdots \quad * \quad \cdots\cdots\cdots$

[1] Si considerino i vettori

$$v_1 := (1,1,-1,-1)\ ,\quad v_2 := (1,-1,1,-1)\ ,\quad v_3 := (-1,0,0,1)\ ,\quad v_4 := (0,1,1,0)$$

nello spazio vettoriale $\mathbb{Q}^4$, e il sottospazio vettoriale $W := Span\big(v_1,v_2,v_3,v_4\big)$ da essi generato.

(a) Determinare un sottoinsieme B_W di $\big\{v_1,v_2,v_3,v_4\big\}$ che sia una base di W.

(b) Determinare quali tra i vettori $v' := (1,1,1,1)$ e $v'' := (1,1,1,-1)$ appartengano a W.

(c) Per ciascuno dei vettori v' e v'' che appartenga a W, determinare le rispettive coordinate rispetto alla base B_W.

<u>Soluzione</u>: *(a)* Consideriamo la matrice

$$A := \big(v_1\,\big|\,v_2\,\big|\,v_3\,\big|\,v_4\big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha per colonne i vettori v_1, v_2, v_3 e v_4. Usando l'algoritmo di eliminazione di Gauss (nel seguito, e. G.), la riduciamo a forma triangolare superiore, come segue:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La terza matrice a destra è in forma triangolare superiore; i suoi pivots sono 1, -2 e 2, e stanno rispettivamente sulle colonne 1, 2 e 4. Pertanto, ne segue che i *vettori iniziali* che nella matrice iniziale A stavano nelle (cioè costituivano le) colonne 1, 2 e 4 formano una base del sottospazio vettoriale da essi generato. In altre parole, abbiamo $B_W := \big\{v_1\,,\,v_2\,,\,v_4\big\}$.

(b) Consideriamo la matrice $\big(A\,\big|\,v'\big) = \big(v_1\,\big|\,v_2\,\big|\,v_3\,\big|\,v_4\,\big|\,v'\big)$ che ha per colonne i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 e v', e riduciamola in forma triangolare superiore tramite l'e. G., come segue:

$$\big(A\,\big|\,v'\big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

L'ultima matrice a destra (triangolare superiore) ha quattro pivots, dunque ha rango 4. Perciò $rg\big(\big(A\,\big|\,v'\big)\big) = 4 > 3 = rg(A)$, e quindi v' non è linearmente dipendente dai vettori v_1, v_2, v_3 e v_4, dunque $v' \notin W := Span\big(v_1,v_2,v_3,v_4\big)$.

Similmente, per v'' calcoliamo il rango della matrice $\big(A \,\big|\, v''\big)$ tramite e. G., il che dà

$$\big(A \,\big|\, v''\big) \;=\; \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \;\Longrightarrow\; \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \;\Longrightarrow\; \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

per cui $rg\big(\big(A \,\big|\, v'\big)\big) = 3 = rg(A)$, e quindi v'' è linearmente dipendente dai vettori v_1, v_2, v_3 e v_4, dunque $v'' \in W := \mathit{Span}\big(v_1, v_2, v_3, v_4\big)$.

(c) Detta $A'' := \big(v_1 \,\big|\, v_2 \,\big|\, v_4\big)$ la matrice che ha per colonne i vettori v_1, v_2 e v_4 , dobbiamo risolvere il sistema $A''\,(x_1, x_2, x_4)^T = v''$, in quanto allora la (unica!) terna soluzione del sistema sarà formata esattamente dalle coordinate x_1, x_2 e x_4 richieste. Per risolvere tale sistema, lo scriviamo tramite la sua matrice completa; allora, operando l'e. G. troviamo

$$\big(A'' \,\big|\, v''\big) \;=\; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \;\Longrightarrow\; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \;\Longrightarrow\; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A questo punto operiamo sull'ultima matrice a destra con una e. G. *all'indietro*, il che ci dà

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \;\Longrightarrow\; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \;\Longrightarrow\; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Infine, nell'ultima matrice a destra dividiamo le prime tre righe per il coefficiente che compare nella posizione sulla diagonale principale (della parte sinistra): 1 per la prima riga, -2 per la seconda riga, 2 per la terza riga. Il risultato è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \;\Longrightarrow\; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

e questo significa che la soluzione del sistema considerato è

$$\big(x_1\,,\,x_2\,,\,x_4\big) \;=\; \big(\tfrac{1}{2}\,,\,\tfrac{1}{2}\,,\,1\big) \qquad \square$$

[2] Si consideri la matrice
$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in Mat_{5\times 5}(\mathbb{Q}) \quad .$$

(a) Determinare se la matrice M sia invertibile.

(b) Nel caso in cui M non sia invertibile, si calcoli un vettore $v \in \mathbb{Q}^5$ tale che $v \neq (0,0,0,0,0)^T$ e $M\,v = (0,0,0,0,0)^T$. Nel caso in cui invece M sia invertibile, si calcoli la matrice inversa M^{-1}.

<u>Soluzione</u>: *(a)* Una matrice quadrata è invertibile se e soltanto se il suo determinante è diverso da zero. Pertanto, per risolvere la questione *(a)* possiamo calcolare tale determinante. Lo sviluppo di Laplace lungo la prima riga dà

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (+1)\cdot 1 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + (+1)\cdot 1 \cdot det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I due determinanti delle matrici 4×4 li calcoliamo tramite sviluppo di Laplace rispettivamente lungo la quarta e la prima colonna, ottenendo rispettivamente

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (+1)\cdot(-1)\cdot det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)\cdot 1 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

In entrambi i casi, resta da calcolare uno stesso determinante 3×3, per il quale possiamo applicare la regola di Sarrus: essa ci dà

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1\cdot 1\cdot(-1) + 0\cdot 0\cdot 1 + 0\cdot 0\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 1 - 0\cdot 0\cdot(-1) - 0\cdot 0\cdot 1 = -2$$

In conclusione, abbiamo

$$det(M) = (+1)\cdot 1\cdot(+1)\cdot(-1)\cdot(-2) + (+1)\cdot 1\cdot(-1)\cdot 1\cdot(-2) = 4 \neq 0$$

e quindi la matrice M è invertibile.

(b) Poiché M è invertibile, dobbiamo calcolarne l'inversa M^{-1}. Consideriamo allora la matrice — rettangolare, di ordine 5×10 — ottenuta giustapponendo M e I_5 (la matrice identità di ordine 5×5), cioè $\left(M \,\middle|\, I_5\right)$. Su tale matrice operiamo tramite e. G. (in avanti e poi all'indietro) e

successiva normalizzazione, fino ad ottenere una nuova matrice (ancora 5×10) del tipo $\big(I_5 \,\big|\, M'\big)$, dove allora la matrice M' sarà proprio l'inversa cercata, cioè $M' = M^{-1}$. Abbiamo dunque

$$\big(M \,\big|\, I_5\big) := \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{array}\right) = \big(I_5 \,\big|\, M'\big) = \Big(I_5 \,\Big|\, M^{-1}\Big)$$

cioè abbiamo

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Nota: *(1)* il metodo seguito per calcolare M^{-1} consente anche di calcolare $det\big(M\big)$, come prodotto dei termini sulla diagonale nella parte sinistra della penultima matrice considerata qui sopra. In più, tale metodo termina con la matrice $\Big(I_5 \,\Big|\, M^{-1}\Big)$ se e soltanto se M è effettivamente invertibile. Perciò si possono affrontare e risolvere le questioni *(a)* e *(b)* simultaneamente tramite il metodo appena esposto.

(2) Il punto *(b)* si può anche risolvere calcolando M^{-1} tramite la formula generale

$$M^{-1} = \Big((-1)^{i+j}\, det\big(M_{ij}\big) \cdot det\big(M\big)\Big)_{i,j=1,\dots,5;}$$

in cui M_{ij} è la matrice 4×4 ottenuta da M cancellando la riga i e la colonna j. In questo caso, tale metodo può essere conveniente, perché in M compaiono molti zeri. D'altra parte, però, un tale approccio richiede comunque di calcolare separatamente $det\big(M\big)$, cosa che col metodo precedentemente esposto non è necessaria. $\square$

[3] Per ogni $k \in \mathbb{Q}$, si consideri la matrice

$$A_k := \begin{pmatrix} 2 & 4-k & -1 \\ -2k-2 & k^2-2k-7 & k+3 \\ 6 & 21-6k & k-7 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{Q}) .$$

(a) Calcolare il rango di A_k (per ogni valore di $k \in \mathbb{Q}$).
(b) Calcolare il determinante di A_k (per ogni valore di $k \in \mathbb{Q}$).
(c) Calcolare i valori di $k \in \mathbb{Q}$ per i quali esista la matrice A_k^{-1} inversa di A_k.

Soluzione: Per trovare risposta alle tre domande poste, ci basta ridurre la matrice A_k in forma a scala, tramite e. G. Abbiamo (senza effettuare alcuno scambio di righe)

$$A_k := \begin{pmatrix} 2 & 4-k & -1 \\ -2k-2 & k^2-2k-7 & k+3 \\ 6 & 21-6k & k-7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4-k & -1 \\ 0 & k-3 & 2 \\ 0 & 9-3k & k-4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4-k & -1 \\ 0 & k-3 & 2 \\ 0 & 0 & k+2 \end{pmatrix} =: S_k$$

che è una trasformazione valida per ogni $k \in \mathbb{Q}$. Adesso distinguiamo due casi:

(1) $k \neq 3$: in questo caso, la matrice S_k a destra è appunto la riduzione di A_k in forma a scala. Dobbiamo ancora distinguere due sottocasi:

(1.1) $k \neq -2$ $\big(k \neq 3\big)$: In questo caso, i termini diagonali di S_k sono tutti diversi da zero, dunque sono i *pivots* di S_k : precisamente, essi sono 2, $(k-3)$, e $(k+2)$. Ne segue che

$$rg\big(A_k\big) = 3 \ , \qquad det\big(A_k\big) = 2\,(k-3)(k+2) = 2\,k^2 - 2\,k - 12 \neq 0 \ , \qquad A_k \text{ è invertibile} .$$

(1.2) $k = -2$ $\big(k \neq 3\big)$: In questo caso, i termini diagonali di S_k sono, nell'ordine, 2, -5, e 0: i primi due — diversi da zero — sono i *pivots* di S_k. Ne segue che

$$rg\big(A_k\big) = 2 \ , \qquad det\big(A_k\big) = 2\,(-5)\,0 = 0 \ , \qquad A_k \text{ non è invertibile} .$$

(2) $k = 3$: in questo caso, la matrice $S_k = S_3$ a destra *non* è (ancora) la riduzione di A_3 in forma a scala. Dobbiamo fare ancora un passo, così da ottenere

$$A_3 \Longrightarrow S_3 := \begin{pmatrix} 2 & 4-3 & -1 \\ 0 & 3-3 & 2 \\ 0 & 0 & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S'_3$$

Quest'ultima matrice S'_3 è effettivamente la riduzione a scala di A_3, con i due *pivots* 2 e 2. Pertanto, ne segue che

$$rg\big(A_3\big) = 2 \ , \qquad det\big(A_3\big) = 2 \cdot 0 \cdot 0 = 0 \ , \qquad A_3 \text{ non è invertibile} .$$

In conclusione, le risposte richieste sono:

(a) $\quad rg\big(A_k\big) = 3 \quad \forall\ k \in \mathbb{Q} \setminus \{-2, 3\}$, $\qquad rg\big(A_k\big) = 2 \quad \forall\ k \in \{-2, 3\}$;

(b) $\quad det\big(A_k\big) = 2\,(k-3)\,(k+2) \qquad \forall\ k \in \mathbb{Q}$;

(c) $\quad A_k$ è invertibile se e soltanto se $k \in \mathbb{Q} \setminus \{-2, 3\}$.

[4] Dato $n \in \mathbb{N}_+$, con $n \geq 3$, si consideri una matrice $A \in Mat_{n\times n}\big(\mathbb{Q}\big)$, il cui spettro sia $Spec\,(A) = \{-2, 0, 5\}$.

Determinare il numero — eventualmente infinito — di soluzioni dei sistemi di equazioni lineari

$$A\,X \;=\; 2\,X\;, \qquad A\,X \;=\; \mathbf{0}\;, \qquad A\,X \;=\; X\;, \qquad A\,X \;=\; 5\,X\;, \qquad A\,X \;=\; -7\,X$$

(in forma compatta), dove $X \in \mathbb{Q}^n$ è la stringa incognita e $\mathbf{0} := (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Q}^n$.

<u>*Soluzione:*</u> Tutti i sistemi considerati sono della forma $A\,X \;=\; \lambda\,X$, oppure, riscrivendo il sistema, $\big(A - \lambda\,I_n\big)\,X = \mathbf{0}$, per qualche $\lambda \in \mathbb{Q}$. Ora, le soluzioni di un tale sistema sono tutti e soli gli autovettori della matrice A con autovalore λ, insieme alla soluzione banale $X = \mathbf{0}$. Il numero di tali autovettori è infinito oppure zero a seconda che λ sia o non sia un autovalore di A, cioè un elemento di $Spec\,(A) = \{-2, 0, 5\}$. Pertanto, ricordando ancora che si ha sempre la soluzione banale $X = \mathbf{0}$, possiamo concludere che la risposta alla domanda posta è, nei rispettivi casi: una, infinite, una, infinite, una. $\square$