GEOMETRIA ed ALGEBRA
CdL in Informatica — a.a. 2006/2007
Prof. Fabio GAVARINI
Appello del 13 Settembre 2007

testo e svolgimento

$\cdots\cdots\cdots \quad * \quad \cdots\cdots\cdots$

[1] Si consideri l'applicazione lineare

$$L_A \colon \mathbb{Q}^4 \longrightarrow \mathbb{Q}^4 \, , \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}$$

(dove " $\cdot$ " è il prodotto righe per colonne).

(a) Calcolare il nucleo $Ker\big(L_A\big)$ e l'immagine $Im\big(L_A\big)$ dell'applicazione L_A .
(b) Dimostrare che $Ker\big(L_A\big) \bigcap Im\big(L_A\big) = \big\{ 0 \big\}$.
(c) Dimostrare che $Ker\big(L_A\big) + Im\big(L_A\big) = \mathbb{Q}^4$.
(d) Determinare due vettori $v,\, w \in \mathbb{Q}^4$ tali che

$$v \in Ker\big(L_A\big) \; , \quad w \in Im\big(L_A\big) \; , \quad v + w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Soluzione</u>: *(a)* Per definizione, il nucleo $Ker\big(L_A\big)$ è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo la cui matrice dei coefficienti è

$$A \;:=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cioè del sistema $\circledast : A\,X = \mathbf{0}$, dove $X := (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ e $\mathbf{0} = (0,0,0,0)^T$.

Per risolvere tale sistema, applichiamo l'algoritmo di eliminazione di Gauss (nel seguito, e. G.) per ridurre la matrice A in forma a scala: il risultato è

$$A \;:=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A' \;:=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il nostro sistema originale $\circledast : A\,X = \mathbf{0}$ allora è equivalente al nuovo sistema $\circledast' : A'\,X = \mathbf{0}$.

Ora, poiché la matrice A' è effettivamente a scala, con pivot $p_1 = 1$, in colonna 1, e $p_2 = 3$ in colonna 4, dalla teoria generale otteniamo che lo spazio delle soluzioni del nuovo sistema $\circledast'$, e quindi anche del sistema $\circledast$, è

$$\Big\{\, \underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{Q}^4 \;\Big|\; \alpha_1 = 0 \,,\, \alpha_4 = 0 \,\Big\} \;=\; \Big\{\, (0, t_1, t_2, 0) \;\Big|\; t_1 \,,\, t_2 \in \mathbb{Q} \,\Big\}$$

e dunque, in definitiva, si ha

$$Ker\big(L_A\big) \;=\; \Big\{\, (0, t_1, t_2, 0) \;\Big|\; t_1 \,,\, t_2 \in \mathbb{Q} \,\Big\} \tag{1}$$

Per calcolare $Im(L_A)$, la teoria generale ci garantisce che esso è il sottospazio di $\mathbb{Q}^4$ che ha per base le colonne di A corrispondenti a quelle di A' in cui compaiono i pivot: nel nostro caso, la 1ª e la 4ª colonna di A. Dunque abbiamo

$$Im(L_A) \;=\; Span\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}\right) \;=\; \Big\{ \big(c_1 + 4\,c_2\,,\, 3\,c_2\,,\, 2\,c_2\,,\, c_2 \big) \;\Big|\; c_1, c_2 \in \mathbb{Q} \Big\} \tag{2}$$

Nota: Per definizione si ha $dim\big(Im\,(L_A)\big) =: rg\,(A)$, il rango di A. Ora, poiché la matrice A' è la riduzione a scala di A, per il rango si ha $rg\,(A) = rg\big(A'\big)$. Dato che A' ha due pivot, si ha anche $rg\big(A'\big) = 2$, e quindi in definitiva $rg\,(A) = rg\big(A'\big) = 2$, da cui si conclude che $dim\big(Im\big(L_A\big)\big) = 2$.

In aggiunta, il *Teorema del Rango* ci dà $rg\,(L_A) + dim\big(Ker\big(L_A\big)\big) = dim\big(\mathbb{Q}^4\big) = 4$, vale a dire $dim\big(Im\,(L_A)\big) + dim\big(Ker\,(L_A)\big) = dim\big(\mathbb{Q}^4\big) = 4$, e pertanto $dim\big(Ker\,(L_A)\big) = 4 - 2 = 2$.

Si noti che $dim\big(Ker\,(L_A)\big) = 2$ segue anche dalla descrizione esplicita del nucleo data in (1); analogamente, dalla descrizione dell'immagine data in (2) segue anche che $dim\big(Im\,(L_A)\big) = 2$.

(b) Per calcolare l'intersezione $Ker\,(L_A) \bigcap Im\,(L_A)$, si consideri una stringa $(a,b,c,d) \in \mathbb{Q}^4$. Dalle definizioni, si ha che $(a,b,c,d) \in Ker\,(L_A) \bigcap Im\,(L_A)$ se e soltanto se

$$\exists\,(x,y,z,u) \in \mathbb{Q}^4 \quad \text{tale che} \quad (a,b,c,d) \;=\; \big(x + 2\,y + 3\,z + 4\,u\,,\, 3\,u\,,\, 2\,u\,,\, u \big) \tag{3}$$

— perché $(a,b,c,d) \in Ker\,(L_A) \bigcap Im\,(L_A) \subseteq Im\,(L_A)$ — e inoltre valgono le identità

$$\circledast : \begin{cases} (x + 2\,y + 3\,z + 4\,u) + 2 \cdot 3\,u + 3 \cdot 2\,u + 4 \cdot u \;=\; 0 \\ 3\,u \;=\; 0 \\ 2\,u \;=\; 0 \\ u \;=\; 0 \end{cases}$$

— che esprimono il fatto che $(a,b,c,d) \in Ker\,(L_A) \bigcap Im\,(L_A) \subseteq Ker\,(L_A)$. Ma il sistema $\circledast$ equivale anche a

$$\circledcirc : \begin{cases} (x + 2\,y + 3\,z + 4\,u) \;=\; 0 \\ 3\,u \;=\; 0 \\ 2\,u \;=\; 0 \\ u \;=\; 0 \end{cases}$$

e quest'ultimo insieme alla (3) ci dà

$$(a,b,c,d) \;=\; \big(x + 2\,y + 3\,z + 4\,u\,,\, 3\,u\,,\, 2\,u\,,\, u \big) \;=\; (0,0,0,0) \;=:\; \mathbf{0} \quad .$$

La conclusione quindi è che $Ker\,(L_A) \bigcap Im\,(L_A) = \{\mathbf{0}\}$, q.e.d.

In alternativa, possiamo procedere così. Per la (1) e la (2), si ha

$$(x,y,z,u) \in Ker\,(L_A) \bigcap Im\,(L_A) \iff \begin{matrix} \text{esistono } t_1\,,\, t_2\,, c_1\,,\, c_2 \in \mathbb{Q} \text{ tali che} \\ \big(0, t_1, t_2, 0\big) = \;(x,y,z,u)\; = \big(c_1 + 4\,c_2, 3\,c_2, 2\,c_2, c_2 \big) \end{matrix}$$

e la doppia uguaglianza a destra vale se e soltanto se $c_2 = 0$, $c_1 = 0$, $t_2 = 0$, $t_1 = 0$, per cui $(x,y,z,u) = (0,0,0,0) =: \mathbf{0}$. Quindi $Ker\,(L_A) \bigcap Im\,(L_A) = \{\mathbf{0}\}$, q.e.d.

(c) Data una stringa $(q_1, q_2, q_3, q_4) \in \mathbb{Q}^4$, cerchiamo $\underline{k} \in Ker(L_A)$ e $\underline{j} \in Im(L_A)$ tali che $(q_1, q_2, q_3, q_4) = \underline{k}+\underline{j}$. Ora, dalla (1) e dalla (2) abbiamo che $\underline{k} = (k_1, k_2, k_3, k_4)$ e $\underline{j} = (j_1, j_2, j_3, j_4)$ sono della forma

$$(k_1, k_2, k_3, k_4) \;=\; \big(0\,, t_1\,, t_2\,, 0\big) \quad , \qquad (j_1, j_2, j_3, j_4) \;=\; \big(c_1 + 4\,c_2\,, 3\,c_2\,, 2\,c_2\,, c_2\big) \tag{4}$$

per opportuni t_1, $t_2 \in \mathbb{Q}$ e c_1, $c_2 \in \mathbb{Q}$; trovare $\underline{k}$ e $\underline{j}$ equivale quindi a trovare la stringa $(t_1, t_2, c_1, c_2) \in \mathbb{Q}^4$, che raccoglie le *incognite* del nostro problema. A questo punto, la condizione $\underline{k} + \underline{j} = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ insieme alla (4) si traduce quindi nel sistema lineare

$$\bigstar : \begin{cases} c_1 + 4\,c_2 \;=\; q_1 \\ t_1 + 3\,c_2 \;=\; q_2 \\ t_2 + 2\,c_2 \;=\; q_3 \\ c_2 \;=\; q_4 \end{cases}$$

di quattro equazioni nelle quattro incognite t_1, t_2, c_1, c_2 , le cui matrice dei coefficienti A e colonna dei termini noti $\mathbf{b}$ sono

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \qquad \mathbf{b} \;=\; \big(q_1\,,\,q_2\,,\,q_3\,,\,q_4\big)$$

Notiamo subito che la matrice A ha determinante $det(A) = 1$. Ad esempio, facendo lo sviluppo di Laplace lungo la quarta colonna. Oppure, possiamo ridurre A in forma triangolare superiore in due semplici passaggi: *scambio di prima e seconda riga*, seguito dallo *scambio di seconda e terza riga*; allora

$$det(A) \;=\; det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; (-1)^2 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; 1 \cdot \big(1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1\big) \;=\; 1$$

Perciò A , avendo determinante diverso da zero, è una matrice invertibile. Quindi

il sistema $\bigstar$ *ha una e una sola soluzione*

precisamente, quella data da $(t_1, t_2, c_1, c_2)^T \;=\; A^{-1}\underline{b}$. Essa ci dà i vettori $\underline{k}$ e $\underline{j}$ cercati, e quindi si conclude che $\mathbb{Q}^4 \subseteq Ker(L_A) + Im(L_A)$. Siccome l'inclusione inversa è automatica, abbiamo l'uguaglianza richiesta: $\mathbb{Q}^4 = Ker(L_A) + Im(L_A)$, q.e.d.

(d) Applichiamo l'analisi fatta in *(c)* al caso specifico della stringa $\big(q_1\,, q_2\,, q_3\,, q_4\big) = (0, 0, 1, 0)$. In questo caso allora il sistema $\bigstar$ diventa

$$\divideontimes : \begin{cases} c_1 + 4\,c_2 \;=\; 0 \\ t_1 + 3\,c_2 \;=\; 0 \\ t_2 + 2\,c_2 \;=\; 1 \\ c_2 \;=\; 0 \end{cases}$$

e tramite il processo di triangolarizzazione descritto sopra — mediante due scambi di righe — quest'ultimo è equivalente al sistema (triangolare superiore)

$$\divideontimes' : \begin{cases} t_1 + 3\,c_2 \;=\; 0 \\ t_2 + 2\,c_2 \;=\; 1 \\ c_1 + 4\,c_2 \;=\; 0 \\ c_2 \;=\; 0 \end{cases}$$

la cui — unica! — soluzione è $(t_1, t_2, c_1, c_2) = (0,1,0,0)$. Da questa ricaviamo infine le stringhe $\underline{k} \in Ker(L_A)$ e $\underline{j} \in Im(L_A)$: precisamente, sfruttando la (4), abbiamo

$$\underline{k} = \big(0\,,t_1\,,t_2\,,0\big) = (0,0,1,0) \;\;, \qquad \underline{j} = \big(c_1+4\,c_2\,,3\,c_2\,,2\,c_2\,,c_2\big) = (0,0,0,0) \qquad \square$$

[2] Si risolva il sistema lineare

$$\circledast : \begin{cases} x_3 \,+\, 2\,x_4 \,=\, 3 \\ 2\,x_1 \,+\, 4\,x_2 \,-\, 2\,x_3 \,=\, 4 \\ 2\,x_1 \,+\, 4\,x_2 \,-\, x_3 \,+\, 2\,x_4 \,=\, 7 \end{cases}$$

nelle indeterminate $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Q}^4$.

<u>*Soluzione:*</u> Il sistema in esame è $\circledast : A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con matrice completa

$$\big(A\,\big|\,\mathbf{b}\big) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & | & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & | & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & | & 7 \end{pmatrix}$$

Operiamo su tale matrice completa con l'e. G., per ridurla in forma a scala. Il procedimento ci dà

$$\big(A\,\big|\,\mathbf{b}\big) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & | & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & | & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & | & 7 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 & | & 7 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & 3 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 & | & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 & | & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} =: \big(S\,\big|\,\mathbf{c}\big)$$

in cui la matrice S è a scala, con pivot $p_1 = 2$ e $p_2 = -1$ nella prima e nella terza colonna. Ora, il sistema $\circledast' : S\,\mathbf{x} = \mathbf{c}$ è dunque equivalente al sistema di partenza $\circledast$; inoltre, per risolvere $\circledast'$ le incognite corrispondenti alle colonne in cui si trovano i pivot, dunque x_1 e x_3 , si possono risolvere rispetto alle altre, le quali invece "restano libere", per cui assumono il ruolo di parametri. Così, in pochi passaggi, risolviamo $\circledast'$ — e quindi il sistema originale $\circledast$ — come segue:

$$\circledast' : \begin{cases} 2\,x_1 \,+\, 4\,x_2 \,-\, x_3 \,+\, 2\,x_4 \,=\, 7 \\ -\,x_3 \,-\, 2\,x_4 \,=\, -3 \\ 0 \,=\, 0 \end{cases} \mapsto \begin{cases} 2\,x_1 \,-\, x_3 \,+\, 2\,x_4 \,=\, 7 \,-\, 4\,t \\ x_2 \,=\, t \\ -\,x_3 \,=\, -3 \,+\, 2\,t' \\ x_4 \,=\, t' \end{cases} \big(\forall\, t, t' \in \mathbb{Q}\big) \mapsto$$

$$\mapsto \begin{cases} 2\,x_1 \,-\, x_3 \,=\, 7 \,-\, 4\,t \,-\, 2\,t' \\ x_2 \,=\, t \\ -\,x_3 \,=\, -3 \,+\, 2\,t' \\ x_4 \,=\, t' \end{cases} \big(\forall\, t, t' \in \mathbb{Q}\big) \mapsto \begin{cases} x_1 \,=\, 5 \,-\, 2\,t \,-\, 2\,t' \\ x_2 \,=\, t \\ x_3 \,=\, 3 \,-\, 2\,t' \\ x_4 \,=\, t' \end{cases} \big(\forall\, t, t' \in \mathbb{Q}\big) \qquad \square$$

[3] Si consideri la matrice
$$A := \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2 & 1 & -4 & 3\end{pmatrix} \qquad \Big(\in Mat_{4\times 4}(\mathbb{Q}) \Big)$$
dove " $\cdot$ " è il prodotto righe per colonne.

(a) Calcolare A^2 (potenza secondo il prodotto righe per colonne).

(b) Determinare se la matrice A sia invertibile oppure no.

(c) Nel caso in cui A non sia invertibile, si determini l'insieme di tutti i vettori $v \in \mathbb{Q}^4$ tali che $A\,v = (0,0,0,0)^T$. Nel caso in cui invece A sia invertibile, si calcoli la matrice inversa A^{-1}.

<u>Soluzione</u>: *(a)* Direttamente dalle definizione del prodotto righe per colonne possiamo calcolare la forma esplicita di A, e successivamente calcolare la sua potenza $A^2 := A \cdot A$. Così facendo si trova

$$A := \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2 & 1 & -4 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 1 & -4 & 3\\ -4 & 2 & -8 & 6\\ -6 & 3 & -12 & 9\\ -8 & 4 & -16 & 12\end{pmatrix} \quad , \qquad A^2 := \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} =: \mathbf{0}$$

In alternativa, possiamo tener conto del fatto che il prodotto righe per colonne è associativo, e quindi si ha

$$\begin{aligned} A^2 = A \cdot A &= \left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2 & 1 & -4 & 3\end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2 & 1 & -4 & 3\end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix}-2 & 1 & -4 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix}-2 & 1 & -4 & 3\end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} \cdot \Big((-2)\cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-4)\cdot 3 + 3 \cdot 4 \Big) \cdot \begin{pmatrix}-2 & 1 & -4 & 3\end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} \cdot (0) \cdot \begin{pmatrix}-2 & 1 & -4 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} =: \mathbf{0} \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il fatto — ovvio — che se in un qualsiasi prodotto (righe per colonne) tra matrici uno dei fattori è la matrice (di una data forma) di tutti zeri, allora il prodotto stesso è una matrice di tutti zeri.

(b) L'insieme $GL_4(\mathbb{Q})$ delle matrici quadrate di ordine 4 invertibili è chiuso rispetto al prodotto righe per colonne (di più, è *un gruppo* rispetto a tale operazione). Allora, se A fosse invertibile, anche A^2 lo sarebbe; ma $A^2 = \mathbf{0}$ invece *non* è invertibile, quindi non lo è nemmeno A.

(c) Visto che A non è invertibile, dobbiamo calcolare l'insieme di tutti i vettori $v \in \mathbb{Q}^4$ tali che $A\,v = (0,0,0,0)^T$. Esso è il nucleo di A — cioè dell'endomorfismo di $\mathbb{Q}^4$ associato ad A — dunque è esattamente lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo avente A come matrice

dei coefficienti, quindi dobbiamo risolvere tale sistema. La riduzione in forma a scala di A è molto semplice: per costruzione, le righe di A sono tutte multiple della stringa $\big(-2,1,-4,3\big)$, la prima con coefficiente 1, la seconda con 2, la terza con 3, la quarta con 4. Quindi se opero le seguenti operazioni elementari

— sommo alla seconda riga la prima moltiplicata per -2,

— sommo alla terza riga la prima moltiplicata per -3,

— sommo alla quarta riga la prima moltiplicata per -4,

ottengo la seguente riduzione a scala:

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 & 3 \\ -4 & 2 & -8 & 6 \\ -6 & 3 & -12 & 9 \\ -8 & 4 & -16 & 12 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S$$

Il corrispondente sistema omogeneo $S\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$, equivalente al sistema $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ha come spazio di soluzioni lo spazio richiesto, che è

$$Ker(A) = \big\{(x,y,z,u) \in \mathbb{Q}^4 \,\big|\, -2\,x + y - 4\,z + 3\,u = 0\big\} = \big\{(x, 2\,x + 4\,z - 3\,u, z, u) \,\big|\, x,z,u \in \mathbb{Q}\big\}$$

[4] Sia data la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in Mat_{4\times 4}\big(\mathbb{Q}\big)$$

(a) Determinare tutti gli autovalori di M.
(b) Per ciascun autovalore di M, calcolare il corrispondente autospazio.

Soluzione: *(a)* Dalla teoria generale sappiamo che gli autovalori di M sono tutte e sole le radici del polinomio caratteristico di M, che è il polinomio

$$p_M(x) := det\big(M - x\,I_4\big) := det\begin{pmatrix} 1-x & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-x & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1-x \end{pmatrix}$$

Calcolando il determinante in esame tramite lo sviluppo di Laplace lungo la quarta riga, otteniamo

$$p_M(x) := det\big(M - x\,I_4\big) := det\begin{pmatrix} 1-x & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-x & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1-x \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{4+4} \cdot (-1-x) \cdot det\begin{pmatrix} 1-x & -5 & 0 \\ -5 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 3-x \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{4+4} \cdot (-1-x) \cdot (-1)^{3+3} \cdot (3-x) \cdot det\begin{pmatrix} 1-x & -5 \\ -5 & 1-x \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{4+4} \cdot (-1-x) \cdot (-1)^{3+3} \cdot (3-x) \cdot \big((1-x)^2 - (-5)^2\big) =$$

$$= (x+1)\,(x-3)\,\big((x-1)^2 - 5^2\big)$$

così che abbiamo $p_M(x) = (x+1)(x-3)\left((x-1)^2-5^2\right)$. Le radici di tale polinomio — dunque gli autovalori di M — sono chiaramente $\{-1,3,-4,6\}$; quindi $Spec(M) = \{-1,3,-4,6\}$.

(b) Dato che $Spec(M) = \{1,3,-4,6\}$ ha esattamente 4 elementi, e 4 è anche l'ordine della matrice M, dalla teoria generale possiamo concludere che la somma delle molteplicità geometriche di tali autovalori è proprio 4, e ciascuna di esse è esattamente 1.

La prima osservazione implica che

M è diagonalizzabile

o, in altre parole,

esiste in $V := \mathbb{Q}^4$ una base composta di autovettori di M.

La seconda osservazione invece significa che ogni autospazio (non banale) di M ha dimensione 1.

Ora, se $\lambda \in Spec(M) = \{-1,3,-4,6\}$ è un autovalore di M, il corrispondente autospazio, in $V := \mathbb{Q}^4$, è dato da

$$V_\lambda := \left\{ v \in V \,\middle|\, M \cdot v = \lambda v \right\} = Ker\left(M - \lambda I_4 \right)$$

Dunque calcolare V_λ significa calcolare il nucleo $Ker\left(M - \lambda I_4\right)$, cioè lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $\circledast : M_\lambda \mathbf{x} = \mathbf{0}$ la cui matrice dei coefficienti è $M_\lambda := M - \lambda I_4$. Per risolvere tale sistema, riduciamo a scala la matrice dei coefficienti M_λ, come segue:

$$M_\lambda := \begin{pmatrix} 1-\lambda & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -5 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1-\lambda & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} -5 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -5+(1-\lambda)^2\big/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} =: T_\lambda$$

Si noti che al primo passaggio abbiamo scambiato la prima e la seconda riga, mentre al secondo abbiamo effettuato una operazione elementare — precisamente, sommare alla seconda riga la prima moltiplicata per $(1-\lambda)\big/5$. In particolare, questa stessa procedura ci dice che

$$det\left(M_\lambda\right) = (-1)^1 \cdot det\left(T_\lambda\right) = (-1)^1 \cdot (-5) \cdot \left(-5+(1-\lambda)^2\big/5\right) \cdot (3-\lambda) \cdot (-1-\lambda) =$$
$$= \left((\lambda-1)^2-5^2\right)(\lambda-3)(\lambda+1)$$

e questo — sostituendo λ con l'incognita x — ci dà un altro modo di calcolare il polinomio caratteristico $p_M(x)$ che avevamo calcolato in precedenza, dato che $p_M(x) = det\left(M_x\right)$.

Analizziamo ora la matrice T_λ.

Se $\lambda \notin \{-1,3,-4,6\} = Spec(M)$, allora T_λ è una matrice a scala, con quattro pivot — non nulli! — sulla diagonale. Quindi il sistema omogeneo associato $T_\lambda \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ha soltanto la soluzione banale, e allora lo stesso è vero per il sistema (equivalente) $M_\lambda \mathbf{x} = \mathbf{0}$: perciò $V_\lambda = \{\mathbf{0}\}$, il che corrisponde al fatto che un tale λ *non* è autovalore di M.

Se ora $\lambda \in \{-1,3,-4,6\} = Spec\,(M)$, allora T_λ è data rispettivamente da

$$T_{-1} := \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -21/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad T_3 := \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -21/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$T_{-4} := \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad , \qquad T_6 := \begin{pmatrix} -5 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

In particolare, T_{-1} è ancora a scala, T_3 si trasforma in una matrice a scala se si "cancella" la quarta riga (sommandogli la terza moltiplicata per 2), mentre entrambe T_{-4} e T_6 diventano a scala se si scambiano la seconda e la terza riga e successivamente la terza e la quarta. In ogni caso, queste quattro matrici — o meglio, le loro riduzioni a scala finali — hanno tutte 3 pivot. Questo corrisponde al fatto che sottraendo tale rango a 4 (l'ordine della matrice M) si ottiene la molteplicità geometrica dell'autovalore λ , che quindi è 1 in tutti i casi (come avevamo già trovato).

Infine, risolvendo i vari sistemi a scala $T_\lambda\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (con $\lambda \in \{-1,3,-4,6\}$) si trovano, come spazi di soluzioni, i vari autospazi, che sono

$$V_{-1} = \big\{(0,0,a,-2\,a)\,\big|\,a \in \mathbb{Q}\big\} \ , \qquad V_3 = \big\{(0,0,b,0)\,\big|\,b \in \mathbb{Q}\big\} \ ,$$
$$V_{-4} = \big\{(c,c,0,0)\,\big|\,c \in \mathbb{Q}\big\} \ , \qquad V_6 = \big\{(d,-d,0,0)\,\big|\,d \in \mathbb{Q}\big\} \ . \qquad \square$$