GEOMETRIA ed ALGEBRA
CdL in Informatica — a.a. 2007/2008
Prof. Fabio GAVARINI
Appello dell'11 Giugno 2008

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

. . . . * . . . .

[1] Nello spazio affine complesso tridimensionale $\mathcal{A}^3_{\mathbb{C}}$, si consideri la retta r di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x + y + 5z + 15 = 0 \\ x - y - z - 5 = 0 \end{cases}$$

(a) Trovare un vettore direttore della retta r .

(b) Detta r' l'unica retta parallela ad r e passante per il punto $Q_0 := (3,-1,2)$, determinare equazioni parametriche di r' .

[2] Si consideri la matrice

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{3,3}(\mathbb{Q})$$

(a) calcolare lo spettro di A ;

(b) calcolare il polinomio caratteristico di A ;

(c) calcolare — cioè descrivere esplicitamente — tutti gli autospazi di A relativi ai vari autovalori — se ne esistono — di A stessa;

(d) (facoltativo) spiegare se A sia diagonalizzabile oppure no; in caso affermativo, determinare esplicitamente una base di $\mathbb{Q}^3$ rispetto alla quale la matrice che esprime l'endomorfismo associato ad A sia diagonale.

[3] Nello spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^4$, si considerino i tre vettori

$$v_1(k) := \big(2,1,-2,1\big) \ , \quad v_2(k) := \big(k-2, 2-k, 0, 2k-4\big) \ , \quad v_3(k) := \big(2k+1, 3-k, k-1, 3k-2\big)$$

dipendenti dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

(a) Per ogni $k \in \mathbb{R}$, si determini se i vettori $v_1(k)$, $v_2(k)$ e $v_3(k)$ siano linearmente indipendenti oppure linearmente dipendenti.

(b) Per ogni $k \in \mathbb{R}$, si estragga da $\big\{v_1(k), v_2(k), v_3(k)\big\}$ un sottoinsieme massimale $I(k)$ di vettori linearmente indipendenti.

(c) (facoltativo) Per ogni $k \in \mathbb{R}$, si completi il sottoinsieme $I(k)$ di vettori linearmente indipendenti in $\big\{v_1(k), v_2(k), v_3(k)\big\}$ ad una base dello spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^4$.

(continua a pagina 2)

[4] Si consideri la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in Mat_{3,3}\big(\mathbb{Z}_7\big) \; .$$

(a) Calcolare il rango di M .

(b) Calcolare il determinante di M .

(c) Determinare se la matrice M sia invertibile oppure no.

(d) Nel caso in cui M non sia invertibile, si determini l'insieme di tutti i vettori $v \in {\mathbb{Z}_7}^3$ tali che $M\,v = (0,0,0,0)^T$. Nel caso in cui invece M sia invertibile, si calcoli esplicitamente la matrice inversa M^{-1} .