**GEOMETRIA ed ALGEBRA**
**CdL in Informatica — a.a. 2007/2008**
*Prof. Fabio GAVARINI*
Appello del 2 Febbraio 2009

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma* **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

. . . . . . . . . * . . . . . . . . .

[**1**] Si considerino

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{4,4}(\mathbb{R}) \quad , \qquad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

*(a)* determinare se esista la matrice inversa $A^{-1}$. In caso affermativo, si calcoli esplicitamente la matrice inversa $A^{-1}$; in caso negativo, si calcoli un elemento non banale di $Ker(A)$.

*(b)* Nello spazio affine $\mathcal{A}^4_{\mathbb{R}}$, si determinino equazioni parametriche del sottospazio $\mathcal{S}$ avente equazioni cartesiane $\circledcirc_{\mathcal{S}} : A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

[**2**] Si consideri l'applicazione lineare $L_A \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ associata alla matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, cioè

$$L_A \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 , \qquad \mathbf{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto A \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

in cui " $\cdot$ " indica il prodotto righe per colonne.

*(a)* Determinare se l'applicazione $L_A$ sia iniettiva, o suriettiva, o biiettiva, o nulla di tutto ciò.

*(b)* Nel caso in cui $L_A$ sia invertibile, si determini la matrice $A' \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ associata a ${L_A}^{-1}$, cioè tale che ${L_A}^{-1} = L_{A'}$. In caso contrario, dimostrare esplicitamente che $L_A$ non è invertibile.

[**3**] Nello spazio affine reale tridimensionale $\mathcal{A}^3_{\mathbb{R}}$, sia data la retta $r$ avente equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 5 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

*(a)* Determinare equazioni cartesiane della retta $r$.

*(b)* Determinare equazioni parametriche di un piano $\pi$ contenente la retta $r$ e parallelo al vettore $\mathbf{v} := (1, -2, -1)$.

*(continua a pagina 2)*

**[4]** Nello spazio vettoriale $V := \mathbb{Q}^4$ , si considerino i tre vettori

$$u_1(\lambda) := \big(-\lambda-1\,,\; \lambda-1\,,\; 3\,\lambda-4\,,\; 2\,\lambda-5\big)\;, \quad u_2(\lambda) := \big(1\,,\; -2\,,\; 1\,,\; 2\big)\;, \quad u_3(\lambda) := \big(\lambda\,,\; 0\,,\; 2\,\lambda\,,\; -\lambda\big)$$

dipendenti dal parametro $\lambda \in \mathbb{Q}$ .

*(a)* Per ogni $\lambda \in \mathbb{Q}$, determinare un sottoinsieme massimale $I(\lambda)$ di $\big\{u_1(\lambda)\,,\, u_2(\lambda)\,,\, u_3(\lambda)\big\}$ composto di vettori linearmente indipendenti.

*(b)* Per ogni $\lambda \in \mathbb{Q}$, determinare se il vettore $v := \big(-4\,, 2\,, -1\,, -9\big)$ appartenga al sottospazio $\mathit{Span}\big(u_1(\lambda)\,,\, u_2(\lambda)\,,\, u_3(\lambda)\big)$ . In caso affermativo, si determinino inoltre coefficienti $c_1(\lambda), c_2(\lambda), c_3(\lambda) \in \mathbb{Q}$ tali che $v \,=\, c_1(\lambda)\, u_1(\lambda) + c_2(\lambda)\, u_2(\lambda) + c_3(\lambda)\, u_3(\lambda)$ .