Esercizi di

ALGEBRA COMMUTATIVA

prof. Fabio Gavarini

$\cdots\cdots\cdots \quad * \quad \cdots\cdots\cdots$

Radicale Nilpotente, Radicale di Jacobson, Operazioni sugli Ideali

N.B.: il simbolo ☡ contrassegna gli esercizi — forse — un po' più complessi.

[1] Sia A un dominio a fattorizzazione unica, si consideri un elemento non nullo e non invertibile $a \in A \setminus \big(U(A) \cup \{0\}\big)$, e sia $a = p_1^{e_1}\, p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ una fattorizzazione di a in irriducibili a due a due non associati. Sia $\overline{A} := A\big/(a)$, e indichiamo gli elementi di $\overline{A}$ con $\overline{x} := x + (a)$, dove $x \in A$.

Dimostrare che il nilradicale di $\overline{A}$ è l'ideale principale di $\overline{A}$ generato da $\overline{p_1\, p_2 \cdots p_k}$.

[2] Sia A un anello commutativo unitario. Indicando con $\mathfrak{N}(R)$ il radicale nilpotente (o "nilradicale") di un qualunque anello R, dimostrare che $\mathfrak{N}\big(A[x]\big) = \mathfrak{N}(A)[x]$.

[3] Sia $\varphi : A \longrightarrow B$ un morfismo di anelli unitari. Dimostrare che:

(a) $\varphi\big(\mathfrak{N}(A)\big) \subseteq \mathfrak{N}(B)$;

(b) se φ è suriettivo, allora $\varphi\big(\mathfrak{R}(A)\big) \subseteq \mathfrak{R}(B)$, dove $\mathfrak{R}(R)$ indica sempre il radicale di Jacobson di un anello R.

[4] Sia A un anello commutativo unitario. Dimostrare che le seguenti proprietà sono equivalenti:

(a) esiste un solo ideale primo in A;

(b) $A = U(A) \cup \mathfrak{N}(A)$, cioè ogni elemento di A o è invertibile o è nilpotente;

(c) l'anello quoziente $A\big/\mathfrak{N}(A)$ è un campo.

[5] – ☡ – Sia A un anello commutativo unitario, e sia $\Sigma := \big\{\, \mathfrak{a} \,\big|\, \mathfrak{a} \trianglelefteq A\,,\ \mathfrak{a} \subseteq Div(A) \,\big\}$ l'insieme di tutti gli ideali di A i cui elementi siano tutti divisori di zero. Dimostrare che:

(a) l'insieme ordinato $\big(\Sigma\,; \subseteq\big)$ ha elementi massimali;

(b) ogni elemento massimale di $\big(\Sigma\,; \subseteq\big)$ è un ideale primo di A;

(c) l'insieme $Div(A)$ dei divisori di zero di A è unione di ideali primi di A.

[6] Sia A un anello commutativo unitario, e sia $\{\mathfrak{a}_i\}_{i\in I}$ una famiglia di ideali in A. Dimostrare che:

(a) l'ideale $\bigcap\limits_{i\in I} \mathfrak{a}_i$ è il più grande (rispetto a $\subseteq$) ideale di A contenuto in tutti gli $\mathfrak{a}_i$;

(b) l'ideale $\sum\limits_{i\in I} \mathfrak{a}_i$ è il più piccolo (rispetto a $\subseteq$) ideale di A che contenga tutti gli $\mathfrak{a}_i$.

N.B.: si dice allora che l'insieme ordinato $\big(\{\text{ideali di } A\}\,;\subseteq\big)$ è un *reticolo completo.*

[7] Siano $\mathfrak{a}\,,\,\mathfrak{b}\,,\,\mathfrak{c}\,,\,\mathfrak{a}_i\,,\,\mathfrak{b}_i\,(i\in I)$ degli ideali in un anello (commutativo unitario) A. Dimostrare che:

(a) $\mathfrak{a}\subseteq(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})$;

(b) $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})\,\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{a}$;

(c) $\big((\mathfrak{a}:\mathfrak{b}):\mathfrak{c}\big) = (\mathfrak{a}:\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}) = \big((\mathfrak{a}:\mathfrak{c}):\mathfrak{b}\big)$;

(d) $\big(\bigcap_{i\in I}\mathfrak{a}_i:\mathfrak{b}\big) = \bigcap_{i\in I}(\mathfrak{a}_i:\mathfrak{b})$;

(e) $\big(\mathfrak{a}:\sum_{i\in I}\mathfrak{b}_i\big) = \bigcap_{i\in I}(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}_i)$.

[8] Siano $\mathfrak{a}\,,\,\mathfrak{b}$ due ideali in un anello (commutativo unitario) A, e indichiamo con $r(\mathfrak{c})$ il radicale di un qualunque ideale $\mathfrak{c}$ in A. Dimostrare che:

(a) $r(\mathfrak{a})\supseteq\mathfrak{a}$;

(b) $r\big(r(\mathfrak{a})\big) = r(\mathfrak{a})$;

(c) $r(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a})\cap r(\mathfrak{b})$;

(d) $r(\mathfrak{a})=(1) \iff \mathfrak{a}=(1)$;

(e) $r(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = r\big(r(\mathfrak{a})+r(\mathfrak{b})\big)$;

(f) se $\mathfrak{p}$ è un ideale primo, allora $r\big(\mathfrak{p}^n\big) = \mathfrak{p}$ per ogni $n\in\mathbb{N}_+$.

[9] Sia $f:A\longrightarrow B$ un morfismo tra anelli (commutativi unitari). Per ogni $\mathfrak{a}\trianglelefteq A$ e ogni $\mathfrak{b}\trianglelefteq B$, indichiamo rispettivamente con $\mathfrak{a}^e$ e con $\mathfrak{b}^c$ l'estensione di $\mathfrak{a}$ in B e la contrazione di $\mathfrak{b}$ in A. Dimostrare che, per ogni $\mathfrak{a}\,,\mathfrak{a}_1\,,\mathfrak{a}_2\,,\trianglelefteq A$ e $\mathfrak{b}\,,\mathfrak{b}_1\,,\mathfrak{b}_2\,,\trianglelefteq B$, si ha:

(a) $(\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2)^e = \mathfrak{a}_1^e+\mathfrak{a}_2^e$, $(\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2)^c \supseteq \mathfrak{b}_1^c+\mathfrak{b}_2^c$;

(b) $(\mathfrak{a}_1\cap\mathfrak{a}_2)^e \subseteq \mathfrak{a}_1^e\cap\mathfrak{a}_2^e$, $(\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2)^c = \mathfrak{b}_1^c\cap\mathfrak{b}_2^c$;

(c) $(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2)^e = \mathfrak{a}_1^e\,\mathfrak{a}_2^e$, $(\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2)^c \supseteq \mathfrak{b}_1^c\,\mathfrak{b}_2^c$;

(d) $(\mathfrak{a}_1:\mathfrak{a}_2)^e \subseteq \big(\mathfrak{a}_1^e:\mathfrak{a}_2^e\big)$, $(\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2)^c = \big(\mathfrak{b}_1^c:\mathfrak{b}_2^c\big)$;

(e) $r(\mathfrak{a})^e \subseteq r\big(\mathfrak{a}^e\big)$, $r(\mathfrak{a})^c = r\big(\mathfrak{b}^c\big)$.