Esercizi di

ALGEBRA COMMUTATIVA

prof. Fabio Gavarini

$\cdots\cdots\cdots \quad * \quad \cdots\cdots\cdots$

Moduli liberi, Torsione, Successioni esatte

N.B.: (1) nel seguito A indica un anello commutativo unitario privo di divisori di zero.
(2) il simbolo ☡ contrassegna gli esercizi — forse — un po' più complessi.

[1] Sia A' un anello commutativo unitario, e sia M un A'–modulo libero. Dimostrare che

$$a \in A' \setminus Div\big(A'\big)\ ,\ \ m \in M \setminus \{0_{_M}\} \quad \Longrightarrow \quad a.m \neq 0_{_M}$$

[2] Per ogni A–modulo M, sia $T(M) := \big\{\, m \in M \,\big|\, \exists\, a \in A \setminus \{0_A\} \,:\, a.m = 0_M \,\big\}$ il sottoinsieme degli elementi di torsione di M. Dimostrare che:

(a) $T(M)$ è un A–sottomodulo di M ;

(b) $T\big(M/T(M)\big) = 0$;

(c) per ogni morfismo di A–moduli $M \xrightarrow{\ f\ } N$ si ha $f\big(T(M)\big) \subseteq T(N)$;

(d) se $M \neq 0$ e $T(M) = \{0_{_M}\}$, allora $Ann_A(M) = \{0_{_A}\}$;

(e) se M è libero, allora $T(M) = \{0_{_M}\}$;

(f) $T(M) = \{0_{_M}\} \iff A.m \cong A$ per ogni $m \in M$.

[3] Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}\big/n\,\mathbb{Z}$, pensato come $\mathbb{Z}$–modulo. Siano poi $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_n$ e $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_n$ la somma e il prodotto diretto di tutti i moduli $\mathbb{Z}_n$. Dimostrare che:

(a) $T\big(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_n\big) = 0$, cioè $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_n$ è modulo di torsione;

(b) $T\big(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_n\big) \subsetneqq T\big(\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_n\big) \subsetneqq \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_n$ *(N.B.: la parte non banale è "$\neq$").*

[4] Supponiamo che A — che è dominio di integrità — abbia caratteristica zero, e si consideri l'anello di serie formali $A[[t_1, \dots, t_n]]$ come modulo su $D := A\big[\partial_{t_1}, \dots, \partial_{t_n}\big]$.

(a) Dimostrare che $T_D\big(A[[t_1, \dots, t_n]]\big) \supseteq A[t_1, \dots, t_n]$.

(b) Dimostrare che se A ha caratteristica zero allora $T_D\big(A[[t_1, \dots, t_n]]\big) = A[t_1, \dots, t_n]$.

[5] – ☡ – Dimostrare che il gruppo additivo $\big(\mathbb{Q}\,;+\big)$, pensato come $\mathbb{Z}$–modulo, non è libero.

[6] Sia $Q(A)$ il campo dei quozienti di A (che esiste, dato che A è dominio di integrità).
Dimostrare che il gruppo additivo $\big(Q(A)\,;+\big)$, pensato come A–modulo, non è libero.

<u>Suggerimento</u>*: procedere come per l'esercizio 5 qui sopra.*

[7] Sia $\mathbb{Q}^\star := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ l'insieme dei razionali non nulli.

Dimostrare che il gruppo abeliano $\big(\mathbb{Q}^\star\,;\cdot\big)$, pensato come $\mathbb{Z}$–modulo, non è libero.

<u>Suggerimento</u>: *si dimostri che* $T\big(\mathbb{Q}^\star\big) \neq \{1\}$, *cioè il modulo* $\mathbb{Q}^\star$ *non è privo di torsione, e si applichi la parte (e) dell'esercizio 2 qui sopra.*

[8] – ☡ – Sia $\mathbb{Q}_+ := \big\{\, q \in \mathbb{Q} \,\big|\, q > 0 \,\big\}$ l'insieme dei razionali positivi.

Dimostrare che il gruppo abeliano $\big(\mathbb{Q}_+\,;\cdot\big)$, pensato come $\mathbb{Z}$–modulo, è libero, e determinarne esplicitamente una base.

<u>Suggerimento</u>: *si consideri la relazione tra* $\big(\mathbb{Q}_+\,;\cdot\big)$ *e* $\big(\mathbb{N}_+\,;\cdot\big)$, *e si consideri quel che sappiamo sulla struttura moltiplicativa di* $\mathbb{N}_+$.

[9] Sia $\mathbb{Q}^\star := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ il gruppo moltiplicativo dei razionali non nulli, pensato come $\mathbb{Z}$–modulo. Dimostrare che $\mathbb{Q}^\star$ è prodotto diretto dei suoi sottomoduli $\{+1,-1\}$ e $\mathbb{Q}_+$; in altre parole, esiste un isomorfismo di $\mathbb{Z}$–moduli $\{+1,-1\} \times \mathbb{Q}_+ \cong \mathbb{Q}^\star$.

<u>Suggerimento</u>: *sfruttare l'esercizio 8 qui sopra.*

[10] – ☡ – Sia D un dominio a fattorizzazione unica, sia $U(D)$ il suo gruppo degli elementi invertibili, sia $Q(D)$ il suo campo dei quozienti, e sia $Q(D)^\star := Q(D) \setminus \{0\}$ il gruppo moltiplicativo del campo $Q(D)$, pensato come $\mathbb{Z}$–modulo.

Dimostrare che $Q(D)^\star$ è prodotto diretto del suo sottomodulo $U(D)$ e di un altro suo sottomodulo *libero* $Q(D)'$. In altre parole, esiste un sottomodulo $Q(D)'$ di $Q(D)^\star$ che è libero e tale che si abbia un isomorfismo di $\mathbb{Z}$–moduli $U(D) \times Q(D)' \cong Q(D)^\star$ — dato dalla restrizione, da $Q(D)^\star \times Q(D)^\star$ a $U(D) \times Q(D)'$, della moltiplicazione di $Q(D)^\star$.

<u>Suggerimento</u>: *procedere come per gli esercizi 8 e 9 qui sopra.*

[11] Sia $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M''$ una successione esatta di A–moduli. Dimostrare che la successione $0 \longrightarrow T\big(M'\big) \longrightarrow T\big(M\big) \longrightarrow T\big(M''\big)$ è a sua volta esatta.

[12] – ☡ – Sia $\circledast : 0 \longrightarrow N' \xrightarrow{\ u\ } N \xrightarrow{\ v\ } N''$ una successione di A–moduli. Dimostrare che

$\circledast$ è esatta $\iff$ per ogni A–modulo M, è esatta la successione

$$\circledast^M \;:\; 0 \longrightarrow Hom_A\big(M,N'\big) \xrightarrow{\ \overline{u}\ } Hom_A\big(M,N\big) \xrightarrow{\ \overline{v}\ } Hom_A\big(M,N''\big)$$

[13] – ☡ – Sia $\circledast : M' \xrightarrow{\ u\ } M \xrightarrow{\ v\ } M'' \longrightarrow 0$ una successione di A–moduli. Dimostrare che

$\circledast$ è esatta $\iff$ per ogni A–modulo N, è esatta la successione

$$\circledast_N \;:\; 0 \longrightarrow Hom_A\big(M'',N\big) \xrightarrow{\ \overline{v}\ } Hom_A\big(M,N\big) \xrightarrow{\ \overline{u}\ } Hom_A\big(M',N\big)$$