ALGEBRA COMMUTATIVA — 2009/2010

prof. Fabio Gavarini

········· $*$ ·········

Elementi Speciali in un Anello — Lemma di Zorn

N.B.: il simbolo ☡ contrassegna gli esercizi — forse — un po' più complessi.

[1] Sia A un anello commutativo unitario. Dimostrare che:

(a) l'unità di A è unica;

(b) se $a \in A$ è invertibile, il suo inverso è unico;

(c) l'insieme $U(A)$ degli elementi invertibili di A è un gruppo (moltiplicativo, rispetto al prodotto in A).

[2] Sia A un anello commutativo unitario. Dimostrare che l'insieme $U(A)$ degli elementi invertibili di A e l'insieme dei divisori di zero di A sono disgiunti.

[3] Sia A un anello commutativo unitario. Un elemento $a \in A$ si dice *idempotente* se $a^2 = a$; si dice *nilpotente* se esiste un intero $n \in \mathbb{N}_+$ tale che $a^n = 0$.

Sia ora $a \neq 0, 1$. Dimostrare che:

(a) se $a \in A$ è nilpotente, allora a è un divisore di zero;

(b) se $a \in A$ è idempotente, allora a è un divisore di zero;

(c) se $a \in A$ è nilpotente, allora a non è idempotente;

(d) se $a \in A$ è nilpotente, allora $a\,b$ è nilpotente, per ogni $b \in A$;

(e) se $u \in A$ è invertibile e $a \in A$ è nilpotente, allora $u + a\,b$ è invertibile, per ogni $b \in A$.

[4] – ☡ – Sia A un anello commutativo unitario. Dimostrare che:

(a) l'insieme $\mathfrak{N}(A)$ degli elementi nilpotente di A è un ideale di A;

(b) l'insieme $\mathfrak{I}(A)$ degli elementi idempotenti di a non è un necessariamente un sottoanello di A;

(c) l'insieme con operazioni $\big(\mathfrak{I}(A)\,;\,*\,,\,\cdot\,\big)$, dove $x * y := x + y - 2\,x\,y$, è un anello.

[5] Sia $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$, e sia $n = p_1^{e_1} \cdots p_s^{e_s}$ la sua fattorizzazione in numeri primi. Dimostrare che $[a]_n \in \mathbb{Z}_n$ è nilpotente se e soltanto se p_i divide a, per ogni $i = 1, \dots, s$.

[6] – ☡ – Sia A un anello commutativo unitario, e $f(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \in A[x]$. Dimostrare che:

(a) $f(x)$ è invertibile se e soltanto se a_0 è invertibile (in A) e a_i è nilpotente (in A) per ogni $i \geq 1$;

(b) $f(x)$ è nilpotente se e soltanto se a_i è nilpotente (in A) per ogni $i \geq 0$;

(c) $f(x)$ è un divisore di zero se e soltanto se esiste $a \in A$ tale che $a\, f(x) = 0$.

[7] Determinare esplicitamente gli elementi invertibili, nilpotenti o idempotenti dei seguenti anelli:

$$\mathbb{Z}_8\,, \quad \mathbb{Z}_{12}\,, \quad \mathbb{Z}_{19}\,, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4\,, \quad Mat_2(Z_2)\,, \quad \mathbb{Z}_{12}[x]\,, \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

[8] Un anello A si dice *booleano* se ogni elemento di A è idempotente, cioè $a^2 = a$ per ogni $a \in A$.

Sia A un anello booleano unitario. Dimostrare che:

(a) $2\,a = 0$ per ogni $a \in A$, cioè A ha caratteristica 2;

(b) $a\,b = a\,b\,a = b\,a$ per ogni $a, b \in A$, in particolare A è commutativo;

(c) A è integro se e soltanto se A è un campo con due elementi.

[9] Sia X un insieme. Dimostrare che:

(a) l'anello delle funzioni $\mathbb{Z}_2^{\,X} := \big\{ f : X \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \big\}$ (con le operazioni di somma e prodotto puntuali) è booleano unitario;

(b) l'anello $\big(\mathcal{P}(X)\,;\, \triangle\,, \cap \big)$ è booleano unitario.

[10] Sia A un anello booleano unitario non nullo. Dimostrare che ogni ideale primo è massimale.

[11] Sia G un gruppo, e sia $X \subseteq G$ tale che $1_G \in X$. Dimostrare che:

(a) esiste un sottoinsieme H di G tale che:

— *(a.1)* H è sottogruppo di G;

— *(a.2)* H è contenuto in X;

— *(a.3)* H è massimale tra tutti i sottoinsiemi di G che soddisfino le proprietà *(a.1–2)*;

(b) esiste un sottoinsieme N di G tale che:

— *(b.1)* N è sottogruppo normale di G;

— *(b.2)* N è contenuto in X;

— *(b.3)* N è massimale tra tutti i sottoinsiemi di G che soddisfino le proprietà *(b.1–2)*.

(Idea: usare il Lemma di Zorn)

[12] – – Sia A un anello commutativo unitario non nullo. Dimostrare che esistono in A ideali primi minimali, tali cioè che non esistano ideali primi strettamente contenuti in essi.

(Idea: usare il Lemma di Zorn)

[13] – – Sia A un anello (non necessariamente commutativo, né unitario). Si doti l'insieme $A_1 := \mathbb{Z} \times A$ delle operazioni

$$\big(z', a'\big) + \big(z'', a''\big) := \big(z' + z'', a' + a''\big) , \quad \big(z', a'\big) \cdot \big(z'', a''\big) := \big(z' \cdot z'' , \, z' a'' + z'' a' + a' \cdot a''\big)$$

e si consideri l'applicazione $j_1 : A \longrightarrow A_1$, $a \mapsto j_1(a) := (0, a)$.

(a) Dimostrare che $\big(A_1 \, ; + , \cdot \big)$ è un anello unitario, e che l'applicazione j_1 è un morfismo di anelli.

(b) Dimostrare che la coppia $\big(A_1, j_1\big)$ gode della seguente *proprietà universale*: se $\big(A', j'\big)$ è una qualsiasi coppia formata da un anello unitario A' e un morfismo di anelli $j' : A \longrightarrow A'$, allora esiste uno e un solo morfismo di anelli $\sigma' : A_1 \longrightarrow A'$ tale che $j' = \sigma' \circ j_1$ e $\sigma'(1_{A_1}) = 1_{A'}$.

(c) Dimostrare che una coppia $\big(A^*, j^*\big)$ che goda della proprietà universale di cui al punto *(b)* è *unica a meno di un unico isomorfismo*: in altre parole, se $\big(A_1^*, j_1^*\big)$ e $\big(A_2^*, j_2^*\big)$ sono due coppie che godono di tale proprietà, allora esiste uno e un solo isomorfismo di anelli $\sigma_{1|2}^* : A_1^* \longrightarrow A_2^*$ tale che $j_2^* = \sigma_{1|2}^* \circ j_1^*$ e $\sigma_{1|2}^*(1_{A_1^*}) = 1_{A_2^*}$.

[14] Siano A e B due anelli (non necessariamente commutativi), con A unitario, e sia $\varphi : A \longrightarrow B$ un morfismo di anelli. Dimostrare che:

(a) Se φ è suriettivo, allora B è unitario, e $\varphi(1_A) = 1_B$.

(b) Se φ non è nullo, e B è privo di divisori di zero, allora B è unitario, e $\varphi(1_A) = 1_B$.

[15] Sia A un anello commutativo unitario, e sia $a \in A$. Dimostrare che:

(1) l'elemento a è *primo* $\iff$ l'ideale principale (a) è *primo*;

(2) l'elemento a è *irriducibile* $\Longleftarrow$ l'ideale principale (a) è *massimale*;

(3) dimostrare il seguente "viceversa parziale" di *(2)*:

l'elemento a è *irriducibile* $\Longrightarrow$ l'ideale principale (a) è *massimale tra gli ideali principali di* A .