Corso di Laurea Specialistica in **Matematica -** a.a. 2005/6

programma del corso di

ALGEBRA COMMUTATIVA

prof. **Fabio Gavarini**

1 - ANELLI, IDEALI, MORFISMI

1.1: anelli - morfismi tra anelli; isomorfismi, endomorfismi, automorfismi - ideali, anelli quoziente - Teorema Fondamentale di Omomorfismo (per anelli) - operazioni sui sottoanelli, Teoremi di Isomorfismo (per anelli) - divisori di zero, elementi nilpotenti, elementi invertibili - domini, campi.

1.2: Lemma di Zorn, ed esempi di sue applicazioni.

1.3: ideali primi, ideali massimali; relazioni tra essi, esistenza, esempi - anelli locali, anelli semilocali; esempi, criteri di localita\`.

1.4: radicale nilpotente, radicale di Jacobson; definizione come intersezione di ideali e caratterizzazione "puntuale".

1.5: operazioni sugli ideali: somma, prodotto, intersezione, divisione - ideali coprimi - prodotto diretto di anelli - Teorema Cinese dei Resti (generalizzato) - ideli primi e unioni/intersezioni di ideali - annullatore e radicale di un ideale - coprimalita\` e radicali.

1.6: estensione e contrazione di ideali rispetto ai morfismi.

Riferimenti: 1.1 [AM] Cap. 1; [La] Ch. II.1-2,4; [MB] Ch. III - **1.2** [La] App. 2.2 - **1.3** [AM] Cap. 1 - **1.4** [AM] Cap. 1 - **1.5** [AM] Cap. 1 - **1.6** [AM] Cap. 1

2 - MODULI, PRODOTTO TENSORIALE, ALGEBRE

2.1: moduli su anelli, rappresentazioni di anelli: definizioni, esempi - morfismi tra moduli, proprieta\` (bifuntorialita\`) di *Hom(-,-)* - modulo duale, modulo biduale; morfismo canonico da un modulo al suo biduale - isomorfismi, endomorfismi, automorfismi - sottomoduli, moduli quoziente - Teorema Fondamentale di Omomorfismo (per moduli) - operazioni sui sottomoduli, Teoremi di Isomorfismo (per moduli) - operazioni sui sottomoduli: somma, intersezione, divisione - annullatore di un modulo - moduli ciclici, moduli finitamente generati - prodotto diretto e somma diretta di moduli - Teorema Cinese dei Resti (generalizzato) in termini di moduli e sottomoduli.

2.2: moduli liberi, basi - ogni spazio vettoriale (=modulo su un campo) ha una base, quindi e\` libero (caso finito <u>e</u> infinito) - tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno la stessa cardinalita\`, detta *dimensione* dello spazio (caso finito <u>e</u> infinito) - tutte le basi di un modulo libero hanno la stessa cardinalita\`, detta *rango* del modulo - duale e biduale di un modulo libero; il morfismo canonico da un modulo libero al suo biduale e\` iniettivo - elementi di torsione, sottomodulo di torsione, moduli senza torsione; esempi e controesempi.

2.3: Lemma di Nakayama (generale) - Lemma di Nakayama per anelli locali.

2.4: successioni di morfismi: successioni esatte, complessi, cocomplessi - (co)cicli, (co)bordi, e (co)omologia di un (co)complesso - criteri di esattezza *via* morfismi e *Hom(-,-)* - diagrammi commutativi (o "euleriani").

2.5: prodotto tensoriale di moduli: definizione/costruzione, proprieta\` universale, unicita\` - prodotti multitensoriali - proprieta\` elementari del prodotto tensoriale e dei prodotti multitensoriali (associativita\`, commutativita\`, distributivita\` rispetto alla somma diretta, ecc.) - prodotto tensoriale di moduli liberi, moltiplicativita\` del rango - prodotto tensoriale e dualita\` - prodotto tensoriale e morfismi (bifuntorialita\`) - prodotto tensoriale ed esattezza di successioni - cambiamenti di anello di base per un modulo: restrizione ed estensione di scalari - restrizione ed estensione di scalari sono transitive.

2.6: algebre, algebre associative, algebre associative commutative - morfismi tra algebre - caratteri di finitezza per algebre (associative) commutative - prodotto tensoriale di algebre (associative) commutative.

Riferimenti: **2.1** [AM] Cap. 2; [La] Ch. III.1-3; [MB] Ch. V.1-4,6-7 - **2.2** [AM] Cap. 2; [La] Ch. III.4-6; [MB] Ch. V.5,7, VI.1-3 - **2.3** [AM] Cap. 2; [La] Ch. VI.6 - **2.4** [AM] Cap. 2; [La] Ch.1-2; [MB] Ch. IX.9 - **2.5** [AM] Cap. 2; [La] Ch. XVI.1-2,4-5; [MB] Ch. IX.8,10-11, XVI.1-2 - **2.6** [AM] Cap. 2; [La] Ch. XVI.6; [MB] Ch. IX.12

3 - ANELLI E MODULI DI FRAZIONI

3.1: anelli di frazioni: costruzione, esempi; localizzazione ad un ideale primo - proprieta` universale degli anelli di frazioni - caratterizzazione degli anelli di frazioni tramite la proprieta` universale.

3.2: moduli di frazioni: costruzione - isomorfismo con l'estensione della base all'anello delle frazioni corrispondente - moduli di frazioni e prodotto tensoriale - moduli di frazioni e morfismi: funtorialita` ed esattezza della formazione di moduli di frazioni - moduli di frazioni rispetto alle operazioni sui sottomoduli (somma, intersezione, quoziente).

3.3: estensione e contrazione di ideali rispetto alla formazione di anelli di frazioni; ideali primi in un anello di frazioni - il nilradicale di un anello di frazioni - ideali primi in un anello localizzato - localizzazione e quozientazione; commutabilita` delle due operazioni.

Riferimenti: **3.1** [AM] Cap. 3; [La] Ch. II.3 - **3.2** [AM] Cap. 3 - **3.3** [AM] Cap. 3

4 - DECOMPOSIZIONIE PRIMARIA (di ideali)

4.1: problemi di "scomposizione": fattorizzare elementi, spezzare una varieta` (affine) in unione di sottovarieta`, ecc. - ideali primari - decomposizioni primarie (=d.p.) e decomposizioni primarie minimali (=d.p.m.) di un ideale - il radicale di un ideale primario e` primo - un ideale con radicale massimale e` sempre primario - l'intersezione di ideali p-primari e` un ideale p-primario - divisione di un ideale primario per un ideale principale.

4.2: il I Teorema di Unicita` per le d.p.m. di un ideale: unicita` e caratterizzazione (in termini dell'ideale) dei primi associati ad una d.p.m. - "primi associati" ad un ideale, "primi minimali" e "primi immersi".

4.3: ideali primari e formazione di frazioni - d.p.m. di un ideale e formazione di frazioni - il II Teorema di Unicita` per le d.p.m. di un ideale: unicita` delle componenti primarie isolate.

Riferimenti: **4.1** [AM] Cap. 4 - **4.2** [AM] Cap. 4 - **4.3** [AM] Cap. 4

5 - MODULI E ANELLI NOETHERIANI E ARTINIANI

5.1: condizioni sulle catene (ascendenti/discendenti/finite) in un insieme ordinato - moduli noetheriani e moduli artiniani, anelli noetheriani e anelli artiniani; esempi e controesempi - noetherianita`/artinianita` e successioni esatte - catene, serie di composizione - tutte le serie di composizione di un modulo hanno la stessa lunghezza, detta *lunghezza* del modulo - additivita` della funzione "lunghezza" - "lunghezza finita = noetherianita` + artinianita`" - rapporto tra dimensione, lunghezza, noetherianita`, e artinianita` di uno spazio vettoriale - "noetherianita` = finitezza dei sottomoduli".

5.2: anelli e algebre noetheriani e artiniani: proprieta` elementari - condizione necessaria per "noetheriano <=> artininano" (per anelli): esiste un numero finito di ideali massimali il cui prodotto e` zero - in un anello noetheriano, ogni ideale contiene una potenza del suo radicale; in particolare, il nilradicale di un anello noetheriano e` nilpotente.

5.3: Teorema della Base di Hilbert (per polinomi e per serie formali) - Teorema di Zarisky (sulle estensioni di campi) - Teorema degli Zeri di Hilbert (forma debole) - varieta` affini - Teorema degli Zeri di Hilbert (forma forte).

5.4: ideali irriducibili - decomposizione in irriducibili negli anelli noetheriani - "irriducibile => primario" negli anelli noetheriani - esistenza di d.p.m. negli anelli noetheriani - esempi e controesempi di ideali primari e d.p.m. in anelli noetheriani.

5.5: dimensione di Krull di un anello: definizione, esempi - ogni anello artiniano ha dimensione zero - ogni anello artiniano e` semilocale - caratterizzazione degli anelli artiniani: "A artiniano = A noetheriano + (K-dim(A) = 0)" - criterio di artinianita` per anelli locali noetheriani - teorema di struttura per gli anelli artiniani: ogni anello artiniano e` prodotto diretto finito (in modo unico) di anelli artiniani locali.

Riferimenti: **5.1** [AM] Cap. 6; [La] Ch. I.11, VI.1; [MB] Ch. XI.1 - **5.2** [AM] Cap. 6-7 - **5.3** [AM] Cap. 7; [La] Ch. VI.2-3 - **5.4** [AM] Cap. 7 - **5.5** [AM] Cap. 8

6 - MODULI SUI DOMINI A IDEALI PRINCIPALI

6.1: dato un modulo (su un PID) libero, ogni suo sottomodulo e` libero, con rango minore o uguale (caso finito e infinito) - in un modulo k-generato, ogni sottomodulo e` h-generato, con h minore o uguale a k - "finitamente generato + senza torsione => libero" (dimostrazione & contresempio) - se un modulo ha un quoziente libero, ne contiene anche una copia isomorfa, come addendo diretto (la successione esatta associata alla proiezione quoziente spacca) - ogni modulo finitamente generato (=modulo f.g.) si spezza in somma diretta di parte libera e sottomodulo di torsione.

6.2: moduli di torsione finitamente generati (=moduli t.f.g.): decomposizione in p-sottomoduli massimali - esistenza di elementi di ordine massimo in un p-modulo, e sollevabilita` di elementi indipendenti - decomposizione ciclica di un p-modulo f.g. tramite divisori elementari: esistenza e unicita` - decomposizione ciclica di un modulo t.f.g. tramite divisori elementari: esistenza e unicita` - decomposizione ciclica di un modulo f.g. tramite parte libera e divisori elementari: esistenza e unicita`.

6.3: esistenza di un addendo diretto ciclico di ordine massimo in un modulo f.g. - decomposizione ciclica di un modulo t.f.g. tramite invarianti: esistenza e unicita` - decomposizione ciclica di un modulo f.g. tramite parte libera e invarianti: esistenza e unicita`.

6.4: relazione tra le due decomposizioni cicliche (tramite divisori elementari e tramite invarianti) di un modulo t.f.g.: derivabilita` dell'una dall'altra - esempi di decomposizioni cicliche - il caso dell'anello $\mathbb{Z}$: gruppi abeliani finiti, e gruppi abeliani finitamente generati.

6.5: applicazione al caso dei moduli ***V*** sull'anello ***k*[x]** (con ***k*** un campo): "forme canoniche" di matrici - polinomio minimo dell'endomorfismo (o della matrice) associato a ***x*** su ***V*** – "matrice compagna" di un polinomio, e "forma compagna" della matrice di ***x*** su ***V*** nel caso ciclico - "forma canonica razionale" della matrice di ***x*** su ***V*** nel caso generale, tramite decomposizione ciclica in termini di invarianti - "forma canonica di Jordan" della matrice di ***x*** su ***V*** quando ***k*** contiene le radici del polinomio minimo di ***x*** su ***V*** - decomposizione (additiva) di Jordan-Chevalley di un endomorfismo di ***V*** per cui ***k*** contenga tutte le radici del suo polinomio minimo: esistenza, espressione polinomiale in ***x***, unicita`.

Riferimenti: **6.1** [La] Ch. I.10, XV.1-2, App. 2.2; [MB] Ch. XI.6 - **6.2** [La] Ch. I.10, XV.2; [MB] Ch. XI.2-3,5 - **6.3** [La] XV.2; [MB] Ch. XI.2-3,6 - **6.4** [La] Ch. I.10, XV.2 - **6.5** [H] Ch. 6.1-7; [La] Ch. XV.3; [MB] Ch. XI.5,8

BIBLIOGRAFIA

[AM] - M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, "Introduzione a l'algebra commutativa", Feltrinelli, Milano, 1981

oppure l'originale in inglese

M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, "Introduction to Commutative Algebra", Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1969.

[H] - I. N. Herstein, "Algebra", III edizione, Editori Riuniti, Roma, 1994.

[La] - S. Lang, "Algebra", Second Edition, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1984.

[MB] - S. Mac Lane, G. Birkhoff, "Algebra", Third Edition, AMS-Chelsea Publishing, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (USA), 1999.

N.B.: sono anche disponibili note manoscritte del prof. Gavarini che coprono *tutto* il programma del corso.