CdLM in **Matematica** - a.a. 2017/2018

programma ***preliminare*** (e dunque *suscettibile di variazioni*) del corso di

ALGEBRA COMMUTATIVA

– 8 CFU –

prof. **Fabio Gavarini**

1 - ANELLI, IDEALI, MORFISMI

Anelli, morfismi tra anelli - ideali, quozienti - Teorema Fondamentale di Omo-morfismo, Teoremi di Isomorfismo - ideali primi, ideali massimali - anelli locali, anelli semilocali - radicale nilpotente, radicale di Jacobson – operazioni su ideali – prodotto diretto - estensione e contrazione di ideali.

2 - MODULI, PRODOTTO TENSORIALE, ALGEBRE

Moduli su anelli, rappresentazioni di anelli; morfismi tra moduli - sottomoduli, quozienti – Teorema Fondamentale di Omomorfismo – operazioni sui sottomoduli - Teoremi di Isomorfismo – torsione - prodotto e somma diretti.

Moduli liberi, basi – moduli liberi su un insieme – esistenza di basi per spazi vettoriali – equicardinalità di basi di uno spazio vettoriale - equicardinalità di basi di un modulo libero - Lemma di Nakayama - successioni esatte (di morfismi).

Prodotto (multi)tensoriale di moduli - restrizione ed estensione di scalari.

Algebre, morfismi tra algebre – prodotto tensoriale di algebre commutative.

Anelli di frazioni - proprietà universale degli anelli di frazioni. Moduli di frazioni – moduli di frazioni ed estensione di scalari. Ideali primi in un anello di frazioni.

3 - MODULI E ANELLI NOETHERIANI E ARTINIANI

Condizioni sulle catene in un insieme ordinato – moduli/anelli noetheriani o artiniani - serie di composizione - tutte le serie di composizione di un modulo hanno la stessa lunghezza – "lunghezza finita = noetherianità & artinianità" - il caso degli spazi vettoriali – "noetherianità = finitezza dei sottomoduli".

Anelli noetheriani e artiniani – criterio per "noetheriano ⇔ artiniano".

Teorema della Base di Hilbert - Teorema di Zariski - Teorema degli Zeri di Hilbert (forma debole) – varietà affini - Teorema degli Zeri di Hilbert (forma forte) – decomposizione primaria di ideali negli anelli noetheriani.

Dimensione di Krull di un anello – caratterizzazione degli anelli artiniani – fattorizzazione degli anelli artiniani in anelli locali.

4 - MODULI SUI DOMINI A IDEALI PRINCIPALI (PID)

Ogni sottomodulo di un modulo libero è libero – "finitamente generato (=f.g.) & senza torsione ⇒ libero" - ogni modulo f.g. si spezza in somma diretta di parte libera e sottomodulo di torsione (f.g., quindi "t.f.g.").

Decomposizione ciclica di un modulo f.g. tramite parte libera e divisori elementari - decomposizione ciclica di un modulo f.g. tramite parte libera e invarianti - relazione tra le due decomposizioni cicliche di un modulo t.f.g.

Applicazione all'anello degli interi $\mathbb{Z}$: gruppi abeliani finitamente generati.

Aplicazione al caso dei moduli $\boldsymbol{V}$ sull'anello $\boldsymbol{k}[\mathbf{x}]$ ($\boldsymbol{k}$ campo): forme canoniche di matrici - decomposizione (additiva) di Jordan-Chevalley di un endomorfismo di $\boldsymbol{V}$: esistenza, espressione polinomiale, unicità - decomposizione (moltiplicativa) di Jordan-Chevalley di un automorfismo di $\boldsymbol{V}$: esistenza e unicità.

5 – LO SPETTRO PRIMO DI UN ANELLO

Richiami topologici: spazi (ir)riducibili, componenti irriducibili, dimensione combinatoria – varietà affini in $\boldsymbol{k}^n$ - spettro primo $Spec(A)$ di un anello A, varietà affini, topologia di Zariski, aperti principali - spettro massimale $Spec_{max}(A)$ - $Spec$ è funtoriale.

Chiusura di un sottospazio, punti chiusi; punto generico di una varietà irriducibile – spettri di anelli artiniani – proprietà di compattezza, di separabilità, di (ir)riducibilità, di (s)connessione di spettri e varietà – $K\text{-}dim(A) = dim(Spec(A))$ – componenti irriducibili e primi minimali - spazi topologici noetheriani – caratterizzazione degli anelli il cui spettro (come spazio topologico) sia noetheriano.