CdL Magistrale in **Matematica Pura ed Applicata**
a.a. 2017/2018

programma ***dettagliato*** del corso di

ALGEBRA COMMUTATIVA

(8 CFU)

prof. **Fabio Gavarini**

1 - ANELLI, IDEALI, MORFISMI

1.1: anelli - morfismi tra anelli; isomorfismi, endomorfismi, automorfismi – sottoanelli, ideali; anelli quoziente – Teorema Fondamentale di Omomorfismo (per anelli) - corrispondenze tra sottoanelli e tra ideali rispetto a un morfismo - operazioni sui sottoanelli, Teoremi di Isomorfismo (per anelli) – immersione di un anello in un anello unitario (caso arbitrario e caso equicaratteristico) - divisori di zero, elementi nilpotenti, elementi invertibili - domini, anelli ridotti, campi; caratterizzazione dei campi.

1.2: Lemma di Zorn - ideali primi, ideali massimali; relazioni tra essi, esistenza, caratterizzazione (mediante il quoziente); esempi - anelli locali, anelli semilocali; esempi, criteri di località – l'ideale massimale in $k[x_1,...,x_n]$ (con k un campo) associato ad un punto di dello spazio affine k^n – l'anello $k[[x_1,...,x_n]]$ delle serie formali a coefficienti in un campo k è locale - radicale nilpotente, radicale di Jacobson; definizione come intersezione di ideali e caratterizzazione "puntuale" (o viceversa).

1.3: operazioni sugli ideali: somma, prodotto, intersezione, divisione – ideali coprimi - prodotto diretto di anelli e sua proprietà universale - Teorema Cinese del Resto (generalizzato) - ideali primi e unioni/intersezioni di ideali – rapporto tra ideali, annullatore e radicale di un ideale - coprimalità e radicali - estensione e contrazione di ideali rispetto ai morfismi.

Riferimenti: **1.1**: [AM] Cap. 1; [La] Ch. II.1-2,5; [MB] Ch. III - **1.2**: [La] App. 2.2; [AM] Cap. 1 - **1.3**: [AM] Cap. 1

2 - MODULI, PRODOTTO TENSORIALE, ALGEBRE

2.1: moduli su anelli, rappresentazioni di anelli: definizioni, esempi – moduli fedeli – morfismi tra moduli, proprietà (bifuntorialità) di *Hom*(-,-) – modulo duale, modulo biduale; morfismo canonico da un modulo al suo biduale – funtorialità (controvariante) della dualità – isomorfismi, endomorfismi, automorfismi di moduli - sottomoduli, moduli quoziente - nucleo e conucleo di un morfismo – Teorema Fondamentale di Omomorfismo (per moduli) - successioni di morfismi: successioni esatte, successioni esatte corte - criteri di esattezza "tramite morfismi" e "tramite *Hom*(-,-)" - corrispondenza tra sottomoduli rispetto a un morfismo – operazioni sui sottomoduli: somma, intersezione, divisione – Teoremi di Isomorfismo (per moduli) - rapporto tra sottomoduli, annullatore di un modulo - moduli ciclici, moduli finitamente generati - prodotto diretto e somma diretta di moduli; il duale di una somma diretta – realizzazione di un prodotto diretto (finito) di anelli come somma diretta (finita) di sottomoduli; decomposizione in termini di una famiglia finita di idempotenti ortonormali.

2.2: moduli liberi, basi; moduli liberi su un insieme (proprietà universale): unicità, esistenza; relazione tra le due nozioni - ogni spazio vettoriale (=modulo su un corpo) ha una base, quindi è libero (caso finito e infinito) - tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno la stessa cardinalità, detta *dimensione* dello spazio (caso finito e infinito) - tutte le basi di un modulo libero hanno la stessa cardinalità, detta *rango* del modulo - se un modulo ha un quoziente libero, ne contiene anche una copia isomorfa, come addendo diretto (l'altro addendo è il nucleo dell'applicazione quoziente) - duale e biduale di un modulo libero: pseudobase (del duale) duale di una base fissata in un modulo libero - il morfismo canonico da un modulo libero al suo biduale è iniettivo – Lemma di Nakayama (generale) - Lemma di Nakayama per anelli locali.

2.3: elementi di torsione, sottomodulo di torsione, moduli senza torsione; esempi e controesempi – relazioni tra "assenza di torsione", "libertà", "fedeltà – se l'anello di base è un dominio a ideali principali (=:DIP), ogni sottomodulo di un modulo libero è libero – se l'anello di base è un DIP, ogni sottomodulo finitamente generato (=:f.g.) e senza torsione (=:s.t.) è libero – decomposizione di un modulo f.g. su un DIP in somma diretta del suo sottomodulo di torsione più un sottomodulo libero: il rango di un modulo f.g. su un DIP.

2.4: prodotto tensoriale di moduli: definizione (tramite proprietà universale), unicità, costruzione; prodotti multitensoriali - proprietà fondamentali del prodotto tensoriale e dei prodotti multitensoriali (associatività, commutatività, distributività rispetto alla somma diretta, ecc.) - prodotto tensoriale di moduli liberi - prodotto tensoriale e dualità – prodotto tensoriale e morfismi (bifuntorialità) - prodotto tensoriale ed esattezza di successioni.

2.5: cambiamenti di anello di base per un modulo: restrizione ed estensione di scalari - restrizione ed estensione preservano la finitezza e sono transitive – restrizione ed estensione sono costruzioni aggiunte l'una dell'altra.

2.6: algebre; algebre associative, algebre associative commutative - morfismi tra algebre - caratteri di finitezza per algebre associative – prodotto tensoriale di algebre associative, e relativi morfismi dai fattori al prodotto.

Riferimenti: **2.1**: [AM] Cap. 2; [La] Ch. III.1-3/6; [MB] Ch. V.1-4/6-7, IX.9 - **2.2**: [AM] Cap. 2; [La] Ch. III.4-6, X.4; [MB] Ch. V.5, VI.1-3, XI.6 - **2.3**: [La] Ch. III.7; [MB] Ch. XI.6 - **2.4**: [AM] Cap. 2; [La] Ch. XVI.1-2/5; [MB] Ch. IX.8/10, XVI.1-2 - **2.5**: [AM] Cap. 2; [MB] Ch. IX.11; [La] Ch. XVI.4 - **2.6**: [AM] Cap. 2; [La] Ch. XVI.6; [MB] Ch. IX.12

3 - ANELLI E MODULI DI FRAZIONI

3.1: anelli di frazioni, morfismo canonico: costruzione, esempi; localizzazione ad un ideale primo - proprietà universale degli anelli di frazioni – caratterizzazione degli anelli di frazioni tramite la proprietà universale.

3.2: moduli di frazioni: costruzione - isomorfismo con l'estensione della base all'anello delle frazioni corrispondente - moduli di frazioni e prodotto tensoriale - moduli di frazioni e morfismi: funtorialità ed esattezza della formazione di moduli di frazioni - moduli di frazioni rispetto alle operazioni sui sottomoduli (somma, intersezione, quoziente): commutazione con queste operazioni.

3.3: estensione e contrazione di ideali rispetto alla formazione di anelli di frazioni; somma, prodotto, intersezione e radicale di ideali rispetto alla formazione di frazioni - ideali primi in un anello di frazioni; il nilradicale di un anello di frazioni - ideali primi in un anello localizzato – localizzazione e quozientazione: commutabilità delle due operazioni.

Riferimenti: **3.1** [AM] Cap. 3; [La] Ch. II.4 - **3.2** [AM] Cap. 3 - **3.3** [AM] Cap. 3

4 - MODULI E ANELLI NOETHERIANI E ARTINIANI

4.1: condizioni sulle catene (ascendenti/discendenti/finite) in un insieme ordinato - moduli noetheriani e moduli artiniani, anelli noetheriani e anelli artiniani; esempi e controesempi - noetherianità/artinianità e successioni esatte - catene, serie di composizione - tutte le serie di composizione di un modulo hanno la stessa lunghezza, detta *lunghezza* del modulo - additività della funzione "lunghezza" – "lunghezza finita = noetherianità & artinianità" –

rapporto tra dimensione, lunghezza, noetherianità, e artinianità di uno spazio vettoriale – "noetherianità = finitezza dei sottomoduli".

4.2: anelli e algebre noetheriani e artiniani: proprietà elementari - condizione necessaria per "noetheriano ⇔ artiniano" (per anelli): esiste un numero finito di ideali massimali il cui prodotto è zero.

4.3: Teorema della Base di Hilbert (per polinomi e serie formali) - Teorema di Zariski per estensioni di campi - Teorema degli Zeri di Hilbert (forma debole) - in un anello noetheriano, ogni ideale contiene una potenza del suo radicale; in particolare, il nilradicale è nilpotente.

4.4: ideali primari, ideali irriducibili - in un anello noetheriano ogni ideale irriducibile è primario – esistenza di una decomposizione in irriducibili, quindi in primari, per ideali negli anelli noetheriani.

4.5: dimensione di Krull di un anello – in un anello artiniano, ogni ideale contiene una potenza del suo radicale; in particolare, il nilradicale è nilpotente - ogni anello artiniano è semilocale - ogni anello artiniano ha dimensione zero – caratterizzazione degli anelli artiniani: "A artiniano ⇔ A noetheriano & [$K\text{-}dim(A) = 0$]" – Teorema di Struttura per gli Anelli Artiniani: ogni anello artiniano è prodotto diretto finito (in modo unico, a meno di isomorfismi) di anelli artiniani locali.

Riferimenti: **4.1** [AM] Cap. 6; [La] Ch. X.1; [MB] Ch. XI.1 - **4.2** [AM] Cap. 6-7; [La] Ch. X.1 - **4.3** [AM] Cap. 7; [La] Ch. IV.4/9, IX.1 - **4.4** [AM] Cap. 7; [La] Ch. X.3 - **4.5** [AM] Cap. 8

5 – LO SPETTRO PRIMO DI UN ANELLO

5.1: richiami di topologia: (sotto)spazi topologici riducibili o irriducibili; componenti irriducibili di uno spazio topologico; dimensione combinatoria (o di Krull) di uno spazio topologico - spettro primo $Spec(A)$ di un anello (commutativo unitario) A: varietà affini $V(\boldsymbol{a})$ in $Spec(A)$, topologia di Zariski in $Spec(A)$, aperti fondamentali - lo spettro massimale $Spec_{max}(A)$, in relazione con $Spec(A)$ – funtorialità di $Spec$: ogni morfismo tra anelli induce un'applicazione continua tra gli spettri (primi), in ordine inverso – omeomorfismo tra una varietà $V(\boldsymbol{a})$ e lo spettro $Spec(A/\boldsymbol{a})$ – la funzione suriettiva $\boldsymbol{a} \to V(\boldsymbol{a})$ dagli ideali di A ai chiusi in $Spec(A)$, che inverte l'inclusione, si restringe ad una biiezione, che inverte l'inclusione, dagli ideali radicali di A ai chiusi in $Spec(A)$.

5.2: gli spettri (primi) e le varietà (affini) sono tutti spazi topologici compatti – gli spettri degli anelli di frazioni – ogni aperto affine in $Spec(A)$ è compatto; caratterizzazione degli aperti in $Spec(A)$ che sono compatti – chiusura di un sottospazio in $Spec(A)$; punti chiusi – il "punto generico" di una varietà irriducibile – caratterizzazione degli spettri di anelli artiniani – ogni spettro è T_0(-separabile) - $Spec(A)$ è T_1 ⇔ $Spec(A) = Spec_{max}(A)$ ⇔ $K\text{-}dim(A) = 0$ – primi minimali di un anello o di un ideale: definizione, esistenza, caratterizzazione - $Spec(A)$ è T_1 ⇔ $Spec(A)$ è T_2 .

5.3: $Spec(A)$ è irriducibile ⇔ il nilradicale di A è primo – i chiusi irriducibili di $Spec(A)$ sono tutte e sole le varietà associate agli ideali primi di A – $K\text{-}dim(A) = dim(Spec(A))$ – le componenti irriducibili di $Spec(A)$, o di $V(\boldsymbol{a})$, corrispondono ai primi minimali di A, o di $\boldsymbol{a}$ – decomposizione primaria di un ideale $\boldsymbol{a}$ e componenti irriducibili di $V(\boldsymbol{a})$ - lo spettro di un prodotto diretto di più anelli (non nulli) è omeomorfo all'unione disgiunta degli spettri degli anelli fattori del prodotto: in particolare, tale spettro è sconnesso se c'è più di un fattore – caratterizzazione dei prodotti diretti di anelli in termini di esistenza di elementi idempotenti non banali – caratterizzazione degli spettri sconnessi: $Spec(A)$ è sconnesso ⇔ A è prodotto diretto di due (o più) anelli.

5.4: spazi topologici noetheriani – sottospazi e quozienti di spazi noetheriani sono noetheriani – ogni spazio noetheriano è compatto – caratterizzazione degli spazi noetheriani in termini di compattezza (di tutti i sottospazi, o di tutti gli aperti) - ogni spazio noetheriano ha un numero finito di componenti irriducibili - uno spazio X è noetheriano ⇔ vale la c.c.d. (≅c.min.) per gli irriducibili di X e ogni chiuso di X ha un numero finito di componenti irriducibili – se A è noetheriano, allora $Spec(A)$ è noetheriano – $Spec(A)$ è noetheriano ⇔ vale la c.c.a. (≅c.max.) per gli ideali radicali di A – caratterizzazione degli anelli il cui spettro sia uno spazio topologico noetheriano.

Riferimenti: [Fi]; [AM] *Esercizi*; [La] Ch. IX.5; [Re] Ch. 5; [Mi] Ch. 11.

6 – INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELLE CATEGORIE

6.1: Categorie: definizione, esempi varî - costruzioni fondamentali: sottocategorie, categorie prodotto, categorie quoziente, categoria delle frecce, categorie (co)fetta - funtori, funtori pieni, funtori fedeli, bifuntori; funtori *Hom* – categoria delle categorie; trasformazioni naturali, categoria dei funtori.

6.2: isomorfismi naturali, quasi-isomorfismi; equivalenze tra categorie e loro caratterizzazione – il funtore di Yoneda; Lemma di Yoneda; il funtore di Yoneda è pieno e fedele - funtori rappresentabili e rappresentazion; unicità di una rappresentazione – esempi di funtori rappresentabili e loro rappresentazioni.

6.3: oggetti finali ed iniziali, loro unicità ed esempi; prodotto e coprodotto – diagrammi in una categoria; coni e coconi, limiti e colimiti - oggetti finali, oggetti iniziali e prodotti come limiti; prodotti fibrati e coprodotti fibrati; sistemi diretti o inversi, limiti diretti o inversi: definizione e esempi.

6.4: aggiunzione tra funtori; composizione di aggiunzioni, le aggiunzioni come "morfismi tra categorie" – unicità del funtore aggiunto - esempi di aggiunzione: gruppo libero (su un insieme), R-modulo libero, R-algebra libera; restrizione vs. estensione di scalari (*reciprocità di Frobenius per moduli su un anello*); l'algebra monoide di un monoide (arbitrario); l'anello unitario associato a un anello (arbitrario); l'abelianizzato di un gruppo (arbitrario).

Riferimenti: **6.1** [Go] Ch. 1.A-B; [Ln] Cap. 1.1-4; [MB] Ch. XV.1-3, IV.5,8-9 - **6.2** [Go] Ch. 1.C-E; [Ln] Cap. 1.5-7; [MB] Ch. XV.4-6 - **6.3** [Go] Ch. 2.A-B; [Ln] Cap. 1.8 - **6.4** [Go] Ch. 3.A-B; [Ln] Cap. 1.9; [MB] Ch. XV.6

BIBLIOGRAFIA

[AM] - M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, "Introduzione a l'algebra commutativa", Feltrinelli, Milano, 1981

oppure l'originale in inglese

M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, "Introduction to Commutative Algebra", Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1969.

[Fi] - C. A. Finocchiaro, "Lo spettro primo di un anello", dispense in rete.

[Go] - J. Goedecke, "Category Theory" – – https://www.dpmms.cam.ac.uk/~jg352/pdf/CategoryTheoryNotes.pdf

[La] - S. Lang, "Algebra", revised Third Edition, Graduate Texts in Mathematics **211**, Springer-Verlag New York, Inc, 2002.

[Ln] - M. Lanini, "Appunti Corso Algebra 3 a.a. 2017-2018" - https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWFpbnxtYXJ0aW5hbGFuaW5pNXxneDozMTgwNjgwZjgwNTNmZGJh

[MB] - S. Mac Lane, G. Birkhoff, "Algebra", Third Edition, AMS-Chelsea Publishing, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (USA), 1999.

[Mi] - J. S. Milne, "A Primer of Commutative Algebra", freely available at http://www.jmilne.org/math/xnotes/ca.html (2009).

[Re] - M. Reid, "Undergraduate Commutative Algebra", London Mathematical Society Student Texts **29**, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.