CdL Triennale/Magistrale in **Matematica** - a.a. 2014/2015

programma ***analitico*** del corso di

# ALGEBRA COMMUTATIVA

**( 6 CFU / 8 CFU )**

prof. **Fabio Gavarini**

## 1 - ANELLI, IDEALI, MORFISMI

**1.1:** anelli – immersione di un anello in un anello unitario - morfismi tra anelli; isomorfismi, endomorfismi, automorfismi - ideali, anelli quoziente – Teorema Fondamentale di Omomorfismo (per anelli) - corrispondenza tra sotto-anelli e tra ideali rispetto a un morfismo - operazioni sui sottoanelli, Teoremi di Isomorfismo (per anelli) - divisori di zero, elementi nilpotenti, elementi invertibili - domini, campi.

**1.2:** Lemma di Zorn, ed esempi di sue applicazioni.

**1.3:** ideali primi, ideali massimali; relazioni tra essi, esistenza, esempi - anelli locali, anelli semilocali; esempi, criteri di località – ideali massimali in anelli di polinomi $k[x_1,...,x_n]$ (con $k$ un campo): l'ideale massimale in $k[x_1,...,x_n]$ associato ad un punto di dello spazio affine $k^n$ – l'anello $k[[x_1,...,x_n]]$ delle serie formali a coefficienti in un campo $k$ è locale.

**1.4:** radicale nilpotente, radicale di Jacobson; definizione come intersezione di ideali e caratterizzazione "puntuale" (o viceversa).

**1.5:** operazioni sugli ideali: somma, prodotto, intersezione, divisione - ideali coprimi - prodotto diretto di anelli - Teorema Cinese dei Resti (generalizzato) - ideali primi e unioni/intersezioni di ideali – rapporto tra ideali, annullatore e radicale di un ideale - coprimalità e radicali - estensione e contrazione di ideali rispetto ai morfismi: proprietà fondamentali.

**Riferimenti: 1.1** [AM] Cap. 1; [La] Ch. II.1-2,5; [MB] Ch. III **- 1.2** [La] App. 2.2 **- 1.3** [AM] Cap. 1 **- 1.4** [AM] Cap. 1 **- 1.5** [AM] Cap. 1

## 2 - MODULI, PRODOTTO TENSORIALE, ALGEBRE

**2.1:** moduli su anelli, rappresentazioni di anelli: definizioni, esempi – morfismi tra moduli, proprietà (bifuntorialità) di *Hom*(-,-) - modulo duale, modulo biduale; morfismo canonico da un modulo al suo biduale - isomorfismi, endomorfismi, automorfismi di moduli - sottomoduli, moduli quoziente - Teorema Fondamentale di Omomorfismo (per moduli) - corrispondenza tra sottomoduli rispetto a un morfismo – il conucleo di un morfismo - operazioni sui sottomoduli: somma, intersezione, divisione – Teoremi di Isomorfismo (per moduli) - rapporto tra sottomoduli, annullatore di un modulo - moduli ciclici, moduli finitamente generati - prodotto diretto e somma diretta di moduli – realizzazione di un prodotto diretto (finito) di anelli, sia *A*, come somma diretta (finita) di *A*-sottomoduli; scomposizione in termini di una famiglia finita di idempotenti ortonormali.

**2.2:** moduli liberi, basi; moduli liberi su un insieme (proprietà universale): unicità, esistenza; relazione tra le due nozioni - ogni spazio vettoriale (=modulo su un corpo) ha una base, quindi è libero (caso finito e infinito) - tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno la stessa cardinalità, detta *dimensione* dello spazio (caso finito e infinito) - tutte le basi di un modulo libero hanno la stessa cardinalità, detta *rango* del modulo - se un modulo ha un quoziente libero, ne contiene anche una copia isomorfa, come addendo diretto (l'altro addendo è il nucleo dell'applicazione quoziente) - duale e biduale di un modulo libero; il morfismo canonico da un modulo libero al suo biduale è iniettivo – elementi di torsione, sottomodulo di torsione, moduli senza torsione; esempi e controesempi - Lemma di Nakayama (generale) - Lemma di Nakayama per anelli locali.

**2.3**: successioni di morfismi: successioni esatte - criteri di esattezza "tramite morfismi" e "tramite *Hom*(-,-)".

**2.4**: prodotto tensoriale di moduli: definizione tramite proprietà universale, unicità, costruzione - prodotti multitensoriali - proprietà fondamentali del prodotto tensoriale e dei prodotti multitensoriali (associatività, commutatività, distributività rispetto alla somma diretta, ecc.) - prodotto tensoriale di moduli liberi, moltiplicatività del rango - prodotto tensoriale e dualità – prodotto tensoriale e morfismi (bifuntorialità) - prodotto tensoriale ed esattezza di successioni - cambiamenti di anello di base per un modulo: restrizione ed estensione di scalari - restrizione ed estensione di scalari sono transitive.

**2.5**: algebre; algebre associative, algebre associative commutative - morfismi tra algebre - caratteri di finitezza per algebre (associative) commutative – prodotto tensoriale di algebre (associative) commutative.

**Riferimenti**: **2.1** [AM] Cap. 2; [La] Ch. III.1-3; [MB] Ch. V.1-4/6-7 - **2.2** [AM] Cap. 2; [La] Ch. III.4-6, X.4; [MB] Ch. V.5,7, VI.1-3 - **2.3** [AM] Cap. 2 - **2.4** [AM] Cap. 2; [MB] Ch. IX.9; [La] Ch. XVI.1-2/4-5; [MB] Ch. IX.8/10-11, XVI.1-2 - **2.5** [AM] Cap. 2; [La] Ch. XVI.6; [MB] Ch. IX.12

## 3 - ANELLI E MODULI DI FRAZIONI

**3.1**: anelli di frazioni: costruzione, esempi; localizzazione ad un ideale primo - proprietà universale degli anelli di frazioni - caratterizzazione degli anelli di frazioni tramite la proprietà universale.

**3.2**: moduli di frazioni: costruzione - isomorfismo con l'estensione della base all'anello delle frazioni corrispondente - moduli di frazioni e prodotto tensoriale - moduli di frazioni e morfismi: funtorialità ed esattezza della formazione di moduli di frazioni - moduli di frazioni rispetto alle operazioni sui sottomoduli (somma, intersezione, quoziente): commutazione con queste operazioni.

**3.3**: estensione e contrazione di ideali rispetto alla formazione di anelli di frazioni; somma, prodotto, intersezione e radicale di ideali rispetto alla formazione di frazioni - ideali primi in un anello di frazioni; il nilradicale di un anello di frazioni - ideali primi in un anello localizzato – localizzazione e quozientazione: commutabilità delle due operazioni.

**Riferimenti**: **3.1** [AM] Cap. 3; [La] Ch. II.4 - **3.2** [AM] Cap. 3 - **3.3** [AM] Cap. 3

## 4 - MODULI E ANELLI NOETHERIANI E ARTINIANI

**4.1**: condizioni sulle catene (ascendenti/discendenti/finite) in un insieme ordinato - moduli noetheriani e moduli artiniani, anelli noetheriani e anelli artiniani; esempi e controesempi - noetherianità/artinianità e successioni esatte - catene, serie di composizione - tutte le serie di composizione di un modulo hanno la stessa lunghezza, detta *lunghezza* del modulo - additività della funzione "lunghezza" – "lunghezza finita = noetherianità & artinianità" – rapporto tra dimensione, lunghezza, noetherianità, e artinianità di uno spazio vettoriale – "noetherianità = finitezza dei sottomoduli".

**4.2**: anelli e algebre noetheriani e artiniani: proprietà elementari - condizione necessaria per "noetheriano ⇔ artiniano" (per anelli): esiste un numero finito di ideali massimali il cui prodotto è zero.

**4.3**: Teorema della Base di Hilbert (per polinomi e serie formali) - Teorema di Zariski per estensioni di campi - Teorema degli Zeri di Hilbert (forma debole).

**4.4**: ideali primari, ideali irriducibili - in un anello noetheriano ogni ideale irriducibile è primario - decomposizione in irriducibili, quindi in primari, negli anelli noetheriani - in un anello noetheriano, ogni ideale contiene una potenza del suo radicale; in particolare, il nilradicale è nilpotente.

**4.5**: dimensione di Krull di un anello - ogni anello artiniano ha dimensione zero - ogni anello artiniano è semilocale – il nilradicale di un anello artiniano è nilpotente – caratterizzazione degli anelli artiniani: "$A$ artiniano $\Leftrightarrow$ $A$ noetheriano & [$K$-$dim(A) = 0$]" – Teorema di Struttura per gli Anelli Artiniani: ogni anello artiniano è prodotto diretto finito (in modo unico, a meno di isomorfismi) di anelli artiniani locali.

**Riferimenti**: **4.1** [AM] Cap. 6; [La] Ch. X.1; [MB] Ch. XI.1 - **4.2** [AM] Cap. 6-7; [La] Ch. X.1 - **4.3** [AM] Cap. 7; [La] Ch. IV.4/9, IX.1 - **4.4** [AM] Cap. 7; [La] Ch. X.3 - **4.5** [AM] Cap. 8

## 5 - MODULI SUI DOMINI A IDEALI PRINCIPALI (=DIP)

**5.1**: dato un modulo (su un DIP) libero, ogni suo sottomodulo è libero, con rango minore o uguale *(caso finito e infinito)* - in un modulo $k$-generato, ogni sottomodulo è $h$-generato, con $h \leq k$ – "finitamente generato & senza torsione $\Rightarrow$ libero" (dimostrazione & controesempio) - ogni modulo finitamente generato (=f.g.) si spezza in somma diretta di una parte libera (con rango, finito, che è unicamente determinato) e del suo sottomodulo di torsione.

**5.2**: moduli di torsione finitamente generati (=moduli t.f.g.): decomposizione in somma diretta di $p$-sottomoduli massimali - esistenza di elementi di ordine massimo in un $p$-modulo, e sollevabilità di elementi indipendenti - decomposizione ciclica di un $p$-modulo f.g. tramite divisori elementari: esistenza e unicità - decomposizione ciclica di un modulo t.f.g. tramite divisori elementari: esistenza e unicità - decomposizione ciclica di un modulo f.g. tramite parte libera e divisori elementari: esistenza e unicità (*1° Teorema di Struttura* per m. f.g).

**5.3**: esistenza di un addendo diretto ciclico di ordine massimo in un modulo f.g. - decomposizione ciclica di un modulo t.f.g. tramite invarianti: esistenza e unicità - decomposizione ciclica di un modulo f.g. tramite parte libera e invarianti: esistenza e unicità (*2° Teorema di Struttura* per m. f.g).

**5.4**: relazione tra le due decomposizioni cicliche (tramite divisori elementari e tramite invarianti) di un modulo t.f.g.: derivabilità dell'una dall'altra - esempi di decomposizioni cicliche.

**5.5**: applicazione al caso dell'anello degli interi $\mathbf{Z}$: gruppi abeliani finiti, gruppi abeliani finitamente generati - applicazione al caso dei moduli $V$ sull'anello $k[x]$ (con $k$ un campo): "forme canoniche" di matrici - polinomio minimo dell'endomorfismo (o della matrice) associato a $x$ su $V$ – "matrice compagna" di un polinomio, e "forma compagna" della matrice di $x$ su $V$ nel caso ciclico – "forma canonica razionale" della matrice di $x$ su $V$ nel caso generale, tramite decomposizione ciclica in termini di invarianti – "forma canonica di Jordan" della matrice di $x$ su $V$ - decomposizione (additiva) di Jordan-Chevalley di un endomorfismo di $V$: esistenza, espressione polinomiale in $x$, unicità.
- decomposizione (additiva) di Jordan-Chevalley di un endomorfismo di $\boldsymbol{V}$ per cui $\boldsymbol{k}$ contenga tutte le radici del suo polinomio minimo: esistenza, espressione polinomiale in $\boldsymbol{x}$, unicità; conseguenze, decomposizione del prodotto di due tali endomorfismi commutanti tra loro - decomposizione (moltiplicativa) di Jordan-Chevalley di un automorfismo di $\boldsymbol{V}$ per cui $\boldsymbol{k}$ contenga tutte le radici del suo polinomio minimo: esistenza, espressione polinomiale in $\boldsymbol{x}$, unicità; conseguenze, decomposizione del prodotto di due tali automorfismi commutanti tra loro.

**Riferimenti**: **5.1** [La] Ch. I.8, III.7, XIV.1, App. 2.2; [MB] Ch. XI.6 - **5.2** [La] Ch. I.8, III.7; [MB] Ch. XI.2-3/5 - **5.3** [La] III.7; [MB] Ch. XI.2-3/6 - **5.4** [La] Ch. I.8, III.7 - **5.5** [He] Ch. 6.1-7; [La] Ch. XIV.2; [MB] Ch. XI.5/8; [Hu1] Ch. II.4.2; [Hu2] Ch. VI.15.1

## 6 – LO SPETTRO PRIMO DI UN ANELLO

## (+2 CFU / *soltanto per studenti della Laurea Magistrale*)

**6.1**: richiami di topologia: (sotto)spazi topologici riducibili o irriducibili; componenti irriducibili di uno spazio topologico; dimensione combinatoria (o di Krull) di uno spazio topologico - spettro primo *Spec*(*A*) di un anello (commutativo unitario) *A*: varietà affini *V*(***a***) in *Spec*(*A*), topologia di Zariski in *Spec*(*A*), aperti fondamentali - lo spettro massimale $Spec_{max}(A)$, in relazione con *Spec*(*A*) – funtorialità di *Spec*: ogni morfismo tra anelli induce un'applicazione continua tra gli spettri (primi), in ordine inverso – omeomorfismo tra una varietà *V*(***a***) e lo spettro *Spec*(*A*/***a***) – la funzione suriettiva ***a*** → *V*(***a***) dagli ideali di *A* ai chiusi in *Spec*(*A*), che inverte l'inclusione, si restringe ad una biiezione, che inverte l'inclusione, dagli ideali radicali di *A* ai chiusi in *Spec*(*A*).

**6.2**: gli spettri (primi) e le varietà (affini) sono tutti spazi topologici compatti – gli spettri degli anelli di frazioni – ogni aperto affine in *Spec*(*A*) è compatto; caratterizzazione degli aperti in *Spec*(*A*) che sono compatti – chiusura di un sottospazio in *Spec*(*A*); punti chiusi – il "punto generico" di una varietà irriducibile – caratterizzazione degli spettri di anelli artiniani – ogni spettro è $T_0$(-separabile) - *Spec*(*A*) è $T_1$ ⇔ *Spec*(*A*) = $Spec_{max}(A)$ ⇔ *K-dim*(*A*) = 0 – primi minimali di un anello o di un ideale: definizione, esistenza, caratterizzazione - *Spec*(*A*) è $T_1$ ⇔ *Spec*(*A*) è $T_2$ .

**6.3**: *Spec*(*A*) è irriducibile ⇔ il nilradicale di *A* è primo – i chiusi irriducibili di *Spec*(*A*) sono tutte e sole le varietà associate agli ideali primi di *A* – *K-dim*(*A*) = *dim*(*Spec*(*A*)) – le componenti irriducibili di *Spec*(*A*), o di *V*(***a***), corrispondono ai primi minimali di *A*, o di ***a*** – decomposizione primaria di un ideale ***a*** e componenti irriducibili di *V*(***a***) - lo spettro di un prodotto diretto di più anelli (non nulli) è omeomorfo all'unione disgiunta degli spettri degli anelli fattori del prodotto: in particolare, tale spettro è sconnesso se c'è più di un fattore – caratterizzazione dei prodotti diretti di anelli in termini di esistenza di elementi idempotenti non banali – caratterizzazione degli spettri sconnessi: *Spec*(*A*) è sconnesso ⇔ *A* è prodotto diretto di due (o più) anelli.

**6.4**: spazi topologici noetheriani – sottospazi e quozienti di spazi noetheriani sono noetheriani – ogni spazio noetheriano è compatto – caratterizzazione degli spazi noetheriani in termini di compattezza (di tutti i sottospazi, o di tutti gli aperti) - ogni spazio noetheriano ha un numero finito di componenti irriducibili - uno spazio *X* è noetheriano ⇔ vale la c.c.d. (≅c.min.) per gli irriducibili di *X* e ogni chiuso di *X* ha un numero finito di componenti irriducibili – se *A* è noetheriano, allora *Spec*(*A*) è noetheriano – *Spec*(*A*) è noetheriano ⇔ vale la c.c.a. (≅c.max.) per gli ideali radicali di *A* – caratterizzazione degli anelli il cui spettro sia uno spazio topologico noetheriano.

**6.5 (*cenni*)**: varietà affini e topologia di Zariski in $\mathbf{A}_n(k) := k^n$, per *k* campo algebricamente chiuso – ideale associato ad un sottoinsieme di $\mathbf{A}_n(k)$ - *Teorema degli Zeri di Hilbert* (*forma forte*); biiezione tra varietà affini in $\mathbf{A}_n(k)$ e ideali radicali in $k[\underline{x}] := k[x_1,\dots,x_n]$ - biiezione tra varietà irriducibili in $\mathbf{A}_n(k)$ e ideali primi in $k[\underline{x}]$ (caratterizzazione delle varietà irriducibili) - $\mathbf{A}_n(k)$ con la topologia di Zariski *versus* *Spec*(*A*) con la topologia di Zariski - *A* come anello di funzioni (continue) su *Spec*(*A*) - ideale in *A* associato ad un sottoinsieme di *Spec*(*A*) - *Teorema degli Zeri di Hilbert* (*forma forte*) *generalizzato* (per ogni anello *A*); biiezione tra varietà affini in *Spec*(*A*) e ideali radicali in *A* - biiezione tra varietà irriducibili in *Spec*(*A*) e ideali primi in *A* (caratterizzazione delle varietà irriducibili).

**Riferimenti**: [Fi]; [AM] *Esercizi*; [La] Ch. IX.5; [Re] Ch. 5; [Mi] Ch. 11.

## BIBLIOGRAFIA

**[AM]** - M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, "Introduzione a l'algebra commutativa", Feltrinelli, Milano, 1981

*oppure l'originale in inglese*

M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, "Introduction to Commutative Algebra", Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1969.

**[Fi]** - C. A. Finocchiaro, "Lo spettro primo di un anello", dispense in rete.

**[He]** - I. N. Herstein, "Algebra", III edizione, Editori Riuniti, Roma, 1994.

**[Hu1]** - J. E. Humphreys, "Introduction to Lie Algebras and Representation Theory", Graduate Texts in Mathematics **9**, Springer-Verlag, New-York Heidelberg Berlin, 1980.

**[Hu2]** - J. E. Humphreys, "Linear Algebraic Groups", Graduate Texts in Mathematics **21**, Springer-Verlag, New-York Heidelberg Berlin, 1995.

**[La]** - S. Lang, "Algebra", revised Third Edition, Graduate Texts in Mathematics **211**, Springer-Verlag New York, Inc, 2002.

**[MB]** - S. Mac Lane, G. Birkhoff, "Algebra", Third Edition, AMS-Chelsea Publishing, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (USA), 1999.

**[Mi]** - J. S. Milne, "A Primer of Commutative Algebra", freely available at http://www.jmilne.org/math/xnotes/ca.html (2009).

**[Re]** - M. Reid, "Undergraduate Commutative Algebra", London Mathematical Society Student Texts **29**, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

--- o ---

**N.B.**: *(1)* i testi [AM], [La], [Mi] e [Re] complessivamente coprono tutto (o quasi tutto) il programma del corso.

*(2)* sono anche disponibili *note manoscritte del prof. Gavarini* che coprono *tutto* il programma del corso.