

ALGEBRA COMMUTATIVA

prof. **Fabio Gavarini**

1 - ANELLI, IDEALI, MORFISMI

1.1: anelli - morfismi tra anelli; isomorfismi, endomorfismi, automorfismi - ideali, anelli quoziente - Teorema Fondamentale di Omomorfismo (per anelli) - corrispondenza tra ideali rispetto a un morfismo - operazioni sui sottoanelli, Teoremi di Isomorfismo (per anelli) - divisori di zero, elementi nilpotenti, elementi invertibili - domini, campi.

1.2: Lemma di Zorn, ed esempi di sue applicazioni.

1.3: ideali primi, ideali massimali; relazioni tra essi, esistenza, esempi - anelli locali, anelli semilocali; esempi, criteri di località.

1.4: radicale nilpotente, radicale di Jacobson; definizione come intersezione di ideali e caratterizzazione "puntuale".

1.5: operazioni sugli ideali: somma, prodotto, intersezione, divisione - ideali coprimi - prodotto diretto di anelli - Teorema Cinese dei Resti (generalizzato) - ideali primi e unioni/intersezioni di ideali - annullatore e radicale di un ideale - coprimalità e radicali.

Riferimenti: **1.1** [AM] Cap. 1; [La] Ch. II.1-2; [MB] Ch. III - **1.2** [La] App. 2.2 - **1.3** [AM] Cap. 1 - **1.4** [AM] Cap. 1 - **1.5** [AM] Cap. 1 - **1.6** [AM] Cap. 1

2 - MODULI, PRODOTTO TENSORIALE, ALGEBRE

2.1: moduli su anelli, rappresentazioni di anelli: definizioni, esempi - morfismi tra moduli, proprietà (bifuntorialità) di $\text{Hom}(-, -)$ - modulo duale, modulo biduale; morfismo canonico da un modulo al suo biduale - isomorfismi, endomorfismi, automorfismi di moduli - sottomoduli, moduli quoziente - Teorema Fondamentale di Omomorfismo - corrispondenza tra sottomoduli rispetto a un morfismo - operazioni sui sottomoduli: somma, intersezione, divisione - Teoremi di Isomorfismo - annullatore di un modulo - moduli ciclici, moduli finitamente generati - prodotto diretto e somma diretta di moduli.

2.2: moduli liberi, basi - moduli liberi su un insieme (proprietà universale): unicità, esistenza - ogni spazio vettoriale (=modulo su un campo) ha una base, quindi è libero (caso finito e infinito) - tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno la stessa cardinalità, detta *dimensione* dello spazio (caso finito e infinito) - tutte le basi di un modulo libero hanno la stessa cardinalità, detta *rango* del modulo - duale e biduale di un modulo libero; il morfismo canonico da un modulo libero al suo biduale è iniettivo - elementi di torsione, sottomodulo di torsione, moduli senza torsione; esempi e controesempi - Lemma di Nakayama (generale) - Lemma di Nakayama per anelli locali.

2.3: successioni di morfismi: successioni esatte (lunghe e corte).

2.4: prodotto tensoriale di moduli: definizione tramite proprietà universale, unicità, costruzione - prodotti multitensoriali - proprietà fondamentali del prodotto tensoriale e dei prodotti multitensoriali (associatività, commutatività, distributività rispetto alla somma diretta, ecc.) - prodotto tensoriale di moduli liberi, moltiplicatività del rango - prodotto tensoriale e dualità - prodotto tensoriale e morfismi (bifuntorialità) - cambiamenti di anello di base per un modulo: restrizione ed estensione di scalari - restrizione ed estensione di scalari sono transitive.

2.5: algebre, algebre associative, algebre associative commutative - morfismi tra algebre - caratteri di finitezza per algebre (associative) commutative - prodotto tensoriale di algebre (associative) commutative.

Riferimenti: 2.1 [AM] Cap. 2; [La] Ch. III.1-3; [MB] Ch. V.1-4,6-7 - 2.2 [AM] Cap. 2; [La] Ch. III.4-6, X.4; [MB] Ch. V.5,7, VI.1-3 - 2.3 [AM] Cap. 2; [La] Ch. XX.1-2 - 2.4 [AM] Cap. 2; [MB] Ch. IX.9 - 2.5 [AM] Cap. 2; [La] Ch. XVI.1-2,4-5; [MB] Ch. IX.8,10-11, XVI.1-2 - 2.6 [AM] Cap. 2; [La] Ch. XVI.6; [MB] Ch. IX.12

3 - ANELLI E MODULI DI FRAZIONI

3.1: anelli di frazioni: costruzione, esempi; localizzazione ad un ideale primo - proprietà universale degli anelli di frazioni - caratterizzazione degli anelli di frazioni tramite la proprietà universale.

3.2: moduli di frazioni: costruzione - isomorfismo con l'estensione della base all'anello delle frazioni corrispondente - moduli di frazioni e prodotto tensoriale - moduli di frazioni e morfismi: funtorialità ed esattezza della formazione di moduli di frazioni - moduli di frazioni rispetto alle operazioni sui sottomoduli (somma, intersezione, quoziente): commutazione con queste operazioni.

3.3: estensione e contrazione di ideali rispetto alla formazione di anelli di frazioni; ideali primi in un anello di frazioni - il nilradicale di un anello di frazioni - ideali primi in un anello localizzato - localizzazione e quozientazione: commutabilità delle due operazioni.

Riferimenti: 3.1 [AM] Cap. 3; [La] Ch. II.4 - 3.2 [AM] Cap. 3 - 3.3 [AM] Cap. 3

4 - MODULI E ANELLI NOETHERIANI E ARTINIANI

4.1: condizioni sulle catene (ascendenti/discendenti/finite) in un insieme ordinato - moduli noetheriani e moduli artiniani, anelli noetheriani e anelli artiniani; esempi e controesempi - noetherianità/artinianità e successioni esatte - catene, serie di composizione - tutte le serie di composizione di un modulo hanno la stessa lunghezza, detta *lunghezza* del modulo - additività della funzione "lunghezza" - "lunghezza finita = noetherianità & artinianità" - rapporto tra dimensione, lunghezza, noetherianità, e artinianità di uno spazio vettoriale - "noetherianità = finitezza dei sottomoduli".

4.2: anelli e algebre noetheriani e artiniani: proprietà elementari - condizione necessaria in un anello per avere "noetheriano $\Leftrightarrow$ artiniano" : esiste un numero finito di ideali massimali il cui prodotto è zero.

4.3: Teorema della Base di Hilbert (per polinomi e per serie formali), e corollari - Teorema di Zariski (sulle estensioni di campi) - Teorema degli Zeri di Hilbert (forma debole).

4.4: ideali primari, ideali irriducibili - in un anello noetheriano ogni irriducibile è primario - decomposizione in irriducibili, quindi in primari, negli anelli noetheriani - in un anello noetheriano ogni ideale contiene una potenza del suo radicale; quindi il nilradicale di un anello noetheriano è nilpotente.

4.5: dimensione di Krull di un anello - ogni anello artiniano ha dimensione zero - ogni anello artiniano è semilocale - il nilradicale di un anello artiniano è nilpotente - caratterizzazione degli anelli artiniani: "A artiniano $\Leftrightarrow$ A noetheriano & $[K\text{-dim}(A) = 0]$ ".

Riferimenti: 4.1 [AM] Cap. 6; [La] Ch. X.1; [MB] Ch. XI.1 - 4.2 [AM] Cap. 6-7 - 4.3 [AM] Cap. 7; [La] Ch. IV.4, IX.1 - 4.4 [AM] Cap. 7; [La] Ch. X.4 - 4.5 [AM] Cap. 8

5 - MODULI SUI DOMINI A IDEALI PRINCIPALI (PID)

5.1: dato un modulo (su un PID) libero, ogni suo sottomodulo è libero, con rango minore o uguale (*caso finito e infinito*) - in un modulo k -generato, ogni sottomodulo è h -generato, con $h \leq k$ - "finitamente generato & senza torsione $\Rightarrow$ libero" (dimostrazione & controesempio) - se un modulo ha un quoziente libero, ne contiene anche una copia isomorfa, come addendo diretto (l'altro addendo è il nucleo dell'applicazione quoziente) - ogni modulo finitamente generato (=modulo f.g.) si spezza in somma diretta di parte libera e sottomodulo di torsione.

5.2: p -moduli (per p primo) - moduli di torsione finitamente generati (=moduli t.f.g.): decomposizione in somma diretta di p -sottomoduli massimali - esistenza di elementi di ordine massimo in un p -modulo, e sollevabilità di elementi indipendenti - decomposizione ciclica di un p -modulo f.g. tramite divisori elementari: esistenza e unicità - decomposizione ciclica di un modulo t.f.g. tramite divisori elementari: esistenza e unicità - decomposizione ciclica di un modulo f.g. tramite parte libera e divisori elementari: esistenza e unicità (*1° Teorema di Struttura*) - decomposizione ciclica di un modulo t.f.g. tramite invarianti: esistenza e unicità - decomposizione ciclica di un modulo f.g. tramite parte libera e invarianti: esistenza e unicità (*2° Teorema di Struttura*) - relazione tra le due decomposizioni cicliche (tramite divisori elementari e tramite invarianti) di un modulo t.f.g.: derivabilità dell'una dall'altra - esempi di decomposizioni cicliche - il caso dell'anello degli interi $\mathbf{Z}$: gruppi abeliani finiti, e gruppi abeliani finitamente generati.

5.3: applicazione al caso dei moduli V sull'anello $k[x]$ (con k un campo): "forme canoniche" di matrici - polinomio minimo dell'endomorfismo (o della matrice) associato a x su V - "matrice compagna" di un polinomio, e "forma compagna" della matrice di x su V nel caso ciclico - "forma canonica razionale" della matrice di x su V nel caso generale, tramite decomposizione ciclica in termini di invarianti - "forma canonica di Jordan" della matrice di x su V quando k contiene le radici del polinomio minimo di x su V - decomposizione (additiva) di Jordan-Chevalley di un endomorfismo di V per cui k contenga tutte le radici del suo polinomio minimo: esistenza, espressione polinomiale in x , unicità; decomposizione (moltiplicativa) di due tali endomorfismi commutanti tra loro - decomposizione (moltiplicativa) di Jordan-Chevalley di un automorfismo di V per cui k contenga tutte le radici del suo polinomio minimo: esistenza, espressione polinomiale in x , unicità; decomposizione del prodotto di due tali automorfismi commutanti tra loro.

Riferimenti: **5.1** [La] Ch. III.7, App. 2.2; [MB] Ch. XI.6 - **5.2** [La] Ch. III.7, XV.2, I.8; [MB] Ch. XI.2-3,5,6 - **5.3** [He] Ch. 6.1-7; [La] Ch. XIV.2; [MB] Ch. XI.5,8; [Hu1] Ch. II.4.2; [Hu2] Ch. VI.15.1

BIBLIOGRAFIA

[AM] - M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, "Introduzione a l'algebra commutativa", Feltrinelli, Milano, 1981

oppure l'originale in inglese

M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, "Introduction to Commutative Algebra", Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1969.

[Fi] - C. A. Finocchiaro, "Lo spettro primo di un anello", dispense in rete.

[He] - I. N. Herstein, "Algebra", III edizione, Editori Riuniti, Roma, 1994.

[Hu1] - J. E. Humphreys, "Introduction to Lie Algebras and Representation Theory", Graduate Texts in Mathematics **9**, Springer-Verlag, New-York Heidelberg Berlin, 1980.

[Hu2] - J. E. Humphreys, "Linear Algebraic Groups", Graduate Texts in Mathematics **21**, Springer-Verlag, New-York Heidelberg Berlin, 1995.

[La] - S. Lang, "Algebra", revised Third Edition, Graduate Texts in Mathematics **211**, Springer-Verlag New York, Inc, 2002.

[MB] - S. Mac Lane, G. Birkhoff, "Algebra", Third Edition, AMS-Chelsea Publishing, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (USA), 1999.

[Mi] - J. S. Milne, "A Primer of Commutative Algebra", freely available at <http://www.jmilne.org/math/xnotes/ca.html> (2009).

[Re] - M. Reid, "Undergraduate Commutative Algebra", London Mathematical Society Student Texts **29**, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

N.B.: (1) i testi [AM], [La], [Mi] e [Re] complessivamente coprono quasi tutto il programma del corso.

(2) sono anche disponibili note manoscritte del prof. Gavarini che coprono *tutto* il programma del corso.
