CdLT in **Matematica** - a.a. 2011/2012

programma ***definitivo*** del corso di

ALGEBRA COMMUTATIVA

prof. **Fabio Gavarini**

1 - ANELLI, IDEALI, MORFISMI

Anelli, morfismi tra anelli - ideali, quozienti - Teorema Fondamentale di Omomorfismo, Teoremi di Isomorfismo - ideali primi, ideali massimali – anelli locali, anelli semilocali - radicale nilpotente, radicale di Jacobson – operazioni su ideali – prodotto diretto di anelli – Teorema Cinese dei Resti (generalizzato).

2 - MODULI, PRODOTTO TENSORIALE, ALGEBRE

Moduli su anelli, rappresentazioni di anelli; morfismi tra moduli - sottomoduli, quozienti – Teorema Fondamentale di Omomorfismo – operazioni sui sottomoduli - Teoremi di Isomorfismo – torsione - prodotto e somma diretti di moduli.

Moduli liberi, basi – moduli liberi su un insieme – esistenza di basi per spazi vettoriali – equicardinalità di basi di uno spazio vettoriale - equicardinalità di basi di un modulo libero - Lemma di Nakayama - successioni esatte (di morfismi).

Prodotto (multi)tensoriale di moduli - restrizione ed estensione di scalari.

Algebre, morfismi tra algebre – prodotto tensoriale di algebre commutative.

3 - ANELLI E MODULI DI FRAZIONI

Anelli di frazioni (e loro proprietà universale) - Moduli di frazioni, relazione con anelli di frazioni (via estensione di scalari) - Ideali primi in un anello di frazioni.

4 - MODULI E ANELLI NOETHERIANI E ARTINIANI

Condizioni sulle catene in un insieme ordinato – moduli/anelli noetheriani o artiniani - serie di composizione - tutte le serie di composizione di un modulo hanno la stessa lunghezza – "lunghezza finita = noetherianità & artinianità" - il caso degli spazi vettoriali – "noetherianità = finitezza dei sottomoduli".

Anelli noetheriani e artiniani – criterio in un anello (tramite ideali massimali) per avere "noetheriano $\Leftrightarrow$ artiniano".

Teorema della Base di Hilbert - Teorema di Zariski - Teorema degli Zeri di Hilbert (forma debole) – decomposizione primaria di ideali negli anelli noetheriani.

Dimensione di Krull di un anello – caratterizzazione degli anelli artiniani: A è artiniano $\Leftrightarrow$ A è noetheriano e ha dimensione di Krull zero.

5 - MODULI SUI DOMINI A IDEALI PRINCIPALI (PID)

Ogni sottomodulo di un modulo libero è libero – "finitamente generato (=f.g.) & senza torsione $\Rightarrow$ libero" - ogni modulo f.g. si spezza in somma diretta di parte libera e sottomodulo di torsione (f.g., quindi "t.f.g.").

Decomposizione ciclica di un modulo f.g. tramite parte libera e divisori elementari - decomposizione ciclica di un modulo f.g. tramite parte libera e invarianti - relazione tra le due decomposizioni cicliche di un modulo t.f.g.

Applicazione all'anello degli interi $\mathbf{Z}$: gruppi abeliani finitamente generati.

Aplicazione al caso dei moduli $\boldsymbol{V}$ sull'anello $\boldsymbol{k}[\mathbf{x}]$ ($\boldsymbol{k}$ campo): forme canoniche di matrici (razionale, di Jordan) - decomposizione (additiva) di Jordan-Chevalley di un endomorfismo di $\boldsymbol{V}$ (con tutti gli autovalori in $\boldsymbol{k}$): esistenza, espressione polinomiale, unicità; decomposizione della somma di due tali endomorfismi commutanti tra loro - decomposizione (moltiplicativa) di Jordan-Chevalley di un automorfismo di $\boldsymbol{V}$ (con tutti gli autovalori in $\boldsymbol{k}$): esistenza, espressione polinomiale, unicità; decomposizione del prodotto di due tali automorfismi commutanti tra loro.