ALGEBRA 2

CdL in Matematica — a.a. 2013/2014

prof. Fabio GAVARINI

2º Esonero — 16 Gennaio 2014

. . . .

N.B.: (1) compilare il compito in modo <u>sintetico</u> ma ***esauriente****, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile;*
(2) i punti contrassegnati con il simbolo ☡ vanno affrontati <u>in seconda battuta</u>.

. . . . * . . . .

[1] — Si consideri l'anello quoziente $A := \mathbb{Z}[x,y,z] \big/ \big(x\,z+1\,,\, x-z \big)$.

(a) Dimostrare che A è un dominio atomico.
(b) Determinare se A sia un dominio a fattorizzazione unica.
(c) Determinare se A sia un dominio a ideali principali.
(d) Determinare se A sia un dominio euclideo.
(e) ☡ Dimostrare che l'elemento $\overline{\big(x\,y^2 + 2\,y^2 + 7\,z^2 + 5\,x - 3 \big)} \in A$ non è invertibile, e determinarne una fattorizzazione in irriducibili.

[2] — Si consideri il sottoinsieme di numeri razionali

$$\mathbb{Z}_{(7)} := \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; a,b \in \mathbb{Z}\,,\, b \neq 0\,,\, \text{M.C.D.}(a,b) = 1\,,\, b \notin 7\,\mathbb{Z} \right\} \quad .$$

(a) Dimostrare che $\mathbb{Z}_{(7)}$ è un dominio euclideo rispetto alla valutazione v_7 definita da

$$v_7 \,:\, \mathbb{Z}_{(7)} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}\,, \quad v_7\big(a/b\big) := n \iff 7^n \Big| a\,,\ \ 7^{n+1} \not\Big| a \quad .$$

(b) Dimostrare che gli ideali di $\mathbb{Z}_{(7)}$ sono tutti e soli della forma $\big(7^n\big)$ al variare di $n \in \mathbb{N}$, cioè tutti e soli quelli composti da multipli — in $\mathbb{Z}_{(7)}$ — di una potenza di 7 .

(c) ☡ Dato $q \in \mathbb{Z}$ e il sottoinsieme di numeri razionali

$$\mathbb{Z}_{(q)} := \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; a,b \in \mathbb{Z}\,,\, b \neq 0\,,\, \text{M.C.D.}(a,b) = 1\,,\, b \notin q\,\mathbb{Z} \right\} \quad .$$

esistono opportune condizioni su q perché, sostituendo ovunque 7 con q, le proprietà espresse in *(a)* e in *(b)* siano ancora valide per $\mathbb{Z}_{(q)}$?

(continua ... $\Longrightarrow$)

[3] — Sia $\mathbb{F}_{81}$ l'anello quoziente $\mathbb{F}_{81} := \mathbb{Z}_3[x]\Big/\big(x^4 + 2\,x + 2\big)$.

(a) Dimostrare che $\mathbb{F}_{81}$ è un campo, e ha cardinalità 81.

(b) Determinare un generatore del gruppo moltiplicativo $\big(\mathbb{F}_{81}^* \,;\, \cdot\big)$ del campo $\mathbb{F}_{81}$, dove $\mathbb{F}_{81}^* := \mathbb{F}_{81} \setminus \{0\}$.

(c) Descrivere esplicitamente (in termini di una base di $\mathbb{F}_{81}$ sul suo sottocampo fondamentale) l'unico sottocampo di $\mathbb{F}_{81}$ che abbia cardinalità 9.

[4] — Si consideri l'estensione di campi $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K} := \mathbb{Q}\big(\sqrt{7}\,,\sqrt[3]{5}\,\big)$, e sia poi $\mathbb{K}^{(n)}$ la minima estensione di $\mathbb{Q}$ che sia normale (su $\mathbb{Q}$) e contenga $\mathbb{K}$.

(a) Determinare i gradi $\big[\,\mathbb{K} : \mathbb{Q}\,\big]$ e $\big[\,\mathbb{K}^{(n)} : \mathbb{Q}\,\big]$.

(b) Calcolare — e descrivere quanto più accuratamente si possa — il gruppo di Galois $\varGamma := \mathit{Gal}\big(\mathbb{K}/\mathbb{Q}\big)$.

(c) Calcolare il sottocampo $\mathbb{K}^{\varGamma}$ degli elementi di $\mathbb{K}$ fissati dal gruppo di automorfismi (di K stesso) $\varGamma$.

(d) Determinare un polinomio $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tale che $\mathbb{K}^{(n)}$ sia campo di spezzamento di $f(x)$ su $\mathbb{Q}$.

(e) Calcolare — e descrivere quanto più accuratamente si possa — il gruppo di Galois $G := \mathit{Gal}\big(\mathbb{K}^{(n)}/\mathbb{Q}\big)$.