ALGEBRA 2

CdL in Matematica — a.a. 2013/2014

prof. Fabio GAVARINI

1^o Esonero — 5 Dicembre 2013

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo <u>*sintetico*</u> *ma* **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in* corsivo *con grafia leggibile.*

. . . . * . . . .

[1] — Sia G un gruppo di ordine 117.

(a) Dimostrare che G è risolubile; in particolare, si presenti esplicitamente una specifica catena discendente di sottogruppi di G, ciascuno normale nel precedente in modo che i rispettivi quozienti siano tutti abeliani.

(b) Dimostrare che G si fattorizza come prodotto semidiretto (interno) $G = H \ltimes N$ di un sottogruppo H ed un sottogruppo normale N entrambi non banali.

(c) Dimostrare che G *non* è necessariamente abeliano, cioè esistono certamente esempi di gruppi di ordine 117 che non sono abeliani.

[2] — Sia G un gruppo e $G^{\times 2} := G \times G$ il prodotto diretto di G con sé stesso. Siano poi D_G e $\mathcal{A}_G$ i due sottoinsiemi di $G^{\times 2}$ definiti da $D_G := \big\{ (g,g) \,\big|\, g \in G \big\}$ e $\mathcal{A}_G := \big\{ (g, g^{-1}) \,\big|\, g \in G \big\}$. Dimostrare che:

(a) D_G è sottogruppo di $G^{\times 2}$;

(b) D_G è (sottogruppo) normale in $G^{\times 2}$ se e soltanto se G è abeliano;

(c) $\mathcal{A}_G$ è sottogruppo di $G^{\times 2}$ se e soltanto se G è abeliano;

(d) se G è abeliano e la funzione (che è un morfismo!) $G \longrightarrow G \; \big(\gamma \mapsto \gamma^2 \big)$ è biunivoca, allora $G^{\times 2}$ è prodotto diretto (interno) dei suoi due sottogruppi normali D_G e $\mathcal{A}_G$.

[3] — Determinare la struttura ciclica del gruppo $U\big(\mathbb{Z}_{36}\big)$ secondo i due teoremi di classificazione dei gruppi abeliani finiti.

[4] — Determinare il numero di anagrammi della parola "BABBANA".

[5] — Sia $\big(\mathit{\Gamma}\,;+\big)$ un gruppo abeliano, Λ un sottogruppo di $\mathit{\Gamma}$, e $\mathit{End}_{\mathcal{G}}\big(\mathit{\Gamma}\,;+\big)$ l'insieme degli endomorfismi (di gruppo) di $\mathit{\Gamma}$, con la sua struttura naturale di anello unitario. Siano poi A un anello e $\varphi : A \longrightarrow \mathit{End}_{\mathcal{G}}\big(\mathit{\Gamma}\,;+\big)$ un morfismo di anelli.

(a) Dimostrare che $A_{(\Lambda)} := \big\{ a \in A \,\big|\, \big(\varphi(a)\big)(\mathit{\Gamma}) \subseteq \Lambda \big\}$ è un sottoanello di A ;

(b) Dimostrare che $A_\Lambda := \big\{ a \in A_{(\Lambda)} \,\big|\, \big(\varphi(a)\big)(\Lambda) = \{0_{\mathit{\Gamma}}\} \big\}$ è ideale sinistro di $A_{(\Lambda)}$.