

ALGEBRA 2 — 2005/2006

Prof.ssa Elisabetta Strickland

2^a prova di esonero — 20/01/2006

.....

1) Nel gruppo $GL(2, \mathbb{C})$, si consideri il sottogruppo H generato dalle matrici $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare l'ordine di H .

(b) Verificare che in H esiste un unico elemento g che ha periodo 2.

(c) Detto K il sottogruppo di H generato dall'elemento g di cui al punto (b), si dica se K è normale in H , e se K è normale in $GL(2, \mathbb{C})$.

2) Si studi il gruppo $I(\mathbb{Q})$ degli automorfismi interni del gruppo dei quaternioni

$$Q := \{ 1, -1, i, -i, j, -j, k, -k \}.$$

3) Dimostrare che un gruppo di ordine 18 non è semplice.

4) Sia $f(x) := 3x^4 - 2x^3 - 3x + 2 \quad (\in \mathbb{Q}[x])$.

(a) Determinare il campo di spezzamento di $f(x)$ su \mathbb{Q} .

(b) Determinare il gruppo di Galois di $f(x)$.