

## ALGEBRA 2 — 2005/2006

*Prof.ssa Elisabetta Strickland*

1<sup>a</sup> prova di esonero — 16/11/2005

.....

**1)** Dimostrare che l'anello quoziente  $F := \mathbb{Z}_7[x] / (x^2 + 3x + 1)$  è un campo finito, e calcolarne il numero di elementi.

**2)** Nell'anello di polinomi  $\mathbb{Q}[x]$  si considerino i due ideali  $A := (2, x)$  e  $B := (3, x)$ . Dimostrare che il sottoinsieme

$$C := \{ ab \mid a \in A, b \in B \}$$

non è un ideale di  $\mathbb{Q}[x]$ .

**3)** Nel gruppo moltiplicativo  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot)$ , si consideri il sottoinsieme  $S := \{ 3^z \mid z \in \mathbb{Z} \}$ . Si dimostri che  $S$  è un sottogruppo di  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot)$ , e che è isomorfo al gruppo  $(\mathbb{Z}; +)$ .