ALGEBRA 2 — 2003/2004

Prof.ssa Elisabetta Strickland

1ª prova di esonero — 10/11/2003

. . . .

1) Determinare tutti i possibili omomorfismi dal gruppo simmetrico $\mathcal{S}_3$ al gruppo di Klein V .

2) Dato un gruppo G , dimostrare che, per ogni $g \in G$, si ha

$$\Big(\forall\ x, y \in G, \quad g\,x = y \Longrightarrow g\,y = x\Big) \quad \Longleftrightarrow \quad o(g) = 2 \ \text{ oppure } \ g = 1 \ .$$

3) Si consideri il sottoinsieme

$$\mathcal{A} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

dell'anello $M_2(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{R}$.

(a) Dimostrare che $\mathcal{A}$ è un sottoanello di $M_2(\mathbb{R})$.

(b) Dimostrare che $I := \big\{ M \in \mathcal{A} \,\big|\, M^2 = 0 \big\}$ è un ideale di $M_2(\mathbb{R})$.

(c) Dimostrare che $\mathcal{A}\big/I \cong M_2(\mathbb{R})$.

4) Si consideri l'anello quoziente $A := \mathbb{Z}[i]\big/\big(1 - 3\,i\,, 4 + 2\,i\big)$. Determinare se l'elemento $\overline{2 - 3\,i}$ è invertibile in A . In caso negativo, si spieghi perché tale inverso non esiste; in caso affermativo, lo si calcoli.