Facoltà di Scienze MFN- Corso di laurea in Matematica

ALGEBRA 2 - G.M. Piacentini Cattaneo -

ANCORA GRUPPI

(1) In $GL(2,\mathbb{C})$ si consideri il sottogruppo H generato dalle due matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinare l'ordine di tale sottogruppo, scrivendo esplicitamente tutti i suoi elementi e i rispettivi periodi. Si dica se il sottogruppo è ciclico e/o abeliano. Indicato con g l'unico elemento di periodo 2, si dica se il sottogruppo da esso generato è normale in H e se è normale in $GL(2,\mathbb{C})$. Provare che tale gruppo è isomorfo al gruppo dei quaternioni.

SOLUZIONE

Posto

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

si osservi innanzitutto che effettivamente A e B stanno in $GL(2,\mathbb{C})$, avendo determinante diverso da zero. Si ha

$$A^2 == \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ A^3 == \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix},\ A^4 = I,$$

$$B^2 == \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ AB == \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},\ A^2B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A^3B == \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

e

$$B^2A = A^3,\ B^3A = AB,\ A^3B = BA.$$

Il sottogruppo H generato da A e B è (si verifichi, sfruttando le relazioni sopra indicate)

$$\{I, A, A^2, A^3, B, AB, A^2B, A^3B\}$$

Si tratta quindi di un gruppo di ordine 8, non è abeliano, dato che ad esempio $AB \neq BA$. Quindi a maggior ragione non è ciclico. Possiede un unico elemento di ordine 2, $A^2 = B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, mentre tutti gli altri diversi dalla matrice identica hanno periodo 4.

Per provare se $\langle A^2 \rangle$ è normale in H e in G basta osservare che la matrice $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ è una matrice scalare, e in quanto tale permuta con ogni matrice. Quindi è un sottogruppo normale in tutto G.

(2) Provare che tutti i gruppi di ordini compresi tra 61 e 71 (inclusi) sono risolubili.

SOLUZIONE

Gli interi 61,67 e 71 sono primi. 62, 65 e 69 sono prodotti di due primi e 63 e 68 sono della forma p^2q e 64 è potenza di un primo. Restano 66 e 70. Un gruppo di ordine 66 possiede un 11-Sylow normale e un gruppo di ordine 70 possiede un 7-Sylow normale. Quindi sono tutti risolubili.

(3) Provare che un gruppo con 24 elementi o contiene un sottogrupppo normale di ordine 8, oppure un sottogruppo normale di ordine 4. Inoltre provare che contiene un sottogruppo normale di indice al più 3.

SOLUZIONE

Il numero di 2-Sylow è 1 o 3. Se è 1, il 2-Sylow è unico, quindi normale di ordine 8. Supponiamo quindi che esistano 3 2-Sylow, P_1, P_2 e P_3, ciascuno di ordine 8. Il sottoinsieme P_1P_2 ha $\frac{|P_1||P_2|}{|P_1 \cap P_2|}$, ossia $\frac{2^6}{2^r}$. Dato che P_1P_2 si trova dentro G, che ha 24 elementi, dovrà essere $\frac{2^6}{2^r} \leq 24$, ossia $r \geq 2$. Dato d'altra parte che $P_1 \cap P_2$ è un sottogruppo proprio di P_1, avrà *al più* 2^2 elementi: ne consegue che se G ha 3 2-Sylow, allora l'intersezione di due di questi ha ordine esattamente 4. Poniamo $T := P_1 \cap P_2$, che ha 4 elementi. Essendo T un sottogruppo di P_1 di indice 2, T è normale in P_1. Analogamente, T è normale in P_2. Ne segue che P_1 e P_2 sono entrambi sottogruppi di $N_G(T)$, per cui $H = \langle P_1, P_2 \rangle$ è un *sottogruppo* e T è un sottogruppo normale di H. Essendo un sottogruppo, H conterrà P_1P_2. Abbiamo visto che P_1P_2 contiene $\frac{2^6}{2^2} = 16$ elementi. Dato che l'unico sotttogruppo di G contenente almeno 16 elementi è l'intero gruppo G, ne segue che $H = G$ e quindi T è un sottogruppo normale di G di ordine 4, che è quanto volevamo provare.

Se G contiene un sottogruppo normale di ordine 8, questo ha indice 2, che è minore di 3. Se invece G contiene un sottogruppo normale di ordine 4, allora il gruppo quoziente G/P ha ordine $\frac{24}{4} = 6$: dato che ogni gruppo di ordine 6 ha un unico 3-Sylow, G/P contiene un 3-Sylow, K/P, che è normale in G/P: ma allora G contiene un sottogruppo K (contenente P) che è normale in G e ha $|K| = 3|P| = 12$ elementi e quindi ha indice 2.

(4) Provare che un gruppo di ordine 36 è risolubile.

SOLUZIONE

Il numero dei 3-Sylow può essere 1 o 4. Se G ha un unico 3-Sylow, allora questo è abeliano, avendo 9 elementi, e G/P ha ordine 4 e quindi è abeliano: quindi in questo caso G è risolubile. Supponiamo quindi il numero dei 3-Sylow sia 4. Siano P_1 e P_2 due 3-Sylow distinti, di ordine 9. Allora $|P_1P_2| \leq 36$ e quindi $|P_1 \cap P_2| > 1$ e quindi $|P_1 \cap P_2| = 3$, da cui $|P_1P_2| = 27$. Il sottogruppo generato da P_1 e P_2 conterrà almeno 27 elementi, e quindi dovrà necessariamente coincidere con tutto G. Essendo P_1 e P_2 abeliani, $P_1 \cap P_2$ è un sottogruppo normale sia di P_1 sia di P_2 e quindi del sottogruppo generato da P_1 e P_2, che è tutto G. Quindi G contiene un sottogruppo normale di ordine 3, il cui gruppo quoziente ha ordine 12. Dato che i gruppi di ordine 12 sono risolubili, G sarà risolubile.

(5) Sia p un primo e sia $G = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \ldots \times \mathbb{Z}_p$ il prodotto diretto di n copie di $\mathbb{Z}_p$. Provare che il gruppo degli automorfismi di G è isomorfo al gruppo $GL(n,p)$ delle matrici invertibili $n \times n$ a elementi in $\mathbb{Z}_p$.

SOLUZIONE

Siano $g_1, g_2, \ldots, g_n$ dei generatori di G. Ogni automorfismo φ di G è univocamente individuato una volta che siano noti i $\varphi(g_i)$ ($i = 1, \ldots n$). Ora, per ogni $g \in G$, l'elemento $\varphi(g)$ sarà della forma $\alpha_1 g_1$, $\alpha_2 g_2, \ldots \alpha_n g_n$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_p$. Quindi si può rappresentare φ mediante una matrice $n \times n$ a elementi in $\mathbb{Z}_p$. Il fatto che φ sia un automorfismo si traduce nel fatto che la corrispondente matrice sia invertibile. Questa corrispondneza tra automorfismi e matrici invertibili è un isomorfismo.

(6) Provare che un gruppo di ordine 48 non è semplice.

SOLUZIONE

$48 = 2^4 \cdot 3$. $N_2 = 1$ o 3. Se è 1, abbiamo trovato un sottogruppo normale. Sia allora $N_3 = 3$. Siano H, K, L tali sottogruppi (sono distinti). Consideriamo $H \cap K$. Tale intersezione è costituita o da 1 o da 2 o da 4 o da 8 elementi. Supponiamo $H \cap K$ sia costituita da 1, 2 o 4 elementi. In questi casi ci saranno rispettivamente 16^2, $16 \cdot 8$ e $16 \cdot 4$ elementi della forma hk , $h \in H, k \in K$: troppi per il gruppo G che ha 48 elementi. Quindi $H \cap K = 8$, e quindi $H \cap K$ ha indice 2 in H e in K, quindi H e K sono sottogruppi di $N_G(H \cap K)$. Si vede allora facilmente che $|N_G(H \cap K)| = 48$, ossia $H \cap K$ è un sottogruppo normale, di ordine 8.

(7) Determinare il numero dei p-Sylow del gruppo simmetrico $\mathcal{S}_p$ su p elementi, p numero primo.

SOLUZIONE

Dato che $|\mathcal{S}_p| = p!$ con p primo, p è la massima potenza di p che divide $|\mathcal{S}_p|$. Quindi i p-Sylow hanno ordine p e quindi sono ciclici. Ciascuno è generato da un elemento di $\mathcal{S}_p$ di ordine p, ossia dai p-cicli, che sono in numero di $(p-1)!$. Dato che in ogni gruppo di ordine p ci sono $p-1$ elementi di ordine p e due gruppi diversi di ordine p hanno intersezione ridotta al solo elemento neutro, ne segue che il numero di p-Sylow è

$$\frac{(p-1)!}{p-1} = (p-2)!$$

(8) Provare che se $|G| \leq 20$, allora o G ha p elementi (p primo) oppure G non è semplice.

(9) Dimostrare che se $|G| = mn$ e G possiede un sottogruppo H di ordine n, con n privo di fattori primi minori di m, allora H è normale in G.

SOLUZIONE

Facciamo agire G sull'insieme X dei laterali modulo il sottogruppo H: $|X| = m$. Quindi resta definito l'omomorfismo

$$\varphi : G \longrightarrow \mathcal{S}_m$$

dove il nucleo K è contenuto in H. Per provare il risultato basta che facciamo vedere che $K = H$. Supponiamo che K sia contenuto propriamente in H. Allora esisterà un p primo che divide $|H/K|$: quindi p dividerà $|H| = n$ e dividerà $|G/K|$. Ne segue che deve essere $p = m$, dato che n per ipotesi non ha fattori primi più piccoli di m. Ma allora H ha indice p (dato che $p = m$), con p il più piccolo divisore primo di $|G|$. Possiamo allora concludere che H è un sottogruppo normale in G, in base al seguente risultato: se G è un gruppo finito e p è il più piccolo divisore primo di $|G|$, allora ogni sottogruppo H di indice p è normale in G. Infatti consideriamo l'azione di H sull'insieme X dei laterali sinistri per moltiplicazione sinistra, ossia

$$h * gH := hgH \qquad \forall g \in G.$$

La cardinalità di X è p (dato che H ha indice p). Dato che la cardinalità di ogni orbita di questa azione divide $|H|$, che è maggiore di p, la cardinalità di ogni orbita sarà o 1 o un numero $\geq p$. Dato poi che questa azione ha sempre almeno un punto (classe) fissa, la classe H, ne segue che ogni orbita ha un solo elemento, ossia l'azione è l'azione banale, ossia

$$hgH = gH \qquad \forall g \in G.$$

Ma questo significa che $g^{-1}hgH = H$ per ogni $g \in G$, ossia $g^{-1}hg \in H$ per ogni $g \in G$, ossia H è normale in G. .

(10) Provare che ogni gruppo G di ordine $|G| = 2m$ con m dispari non è semplice.

SOLUZIONE

Si consideri l'omomorfismo da G in $\mathcal{S}_{2m}$

$$\Psi\ G \longrightarrow \ \mathcal{S}_{2m}$$

che manda $g \in G$ in $T_g : x \ \longrightarrow gx$. Sappiamo (teorema di Cayley) che G è immerso in $\mathcal{S}_{2m}$, in quanto l'omomorfismo è iniettivo.

Poiché $|G| = 2m$ esiste in G, per il teorema di Cauchy, un elemento di ordine 2.

Indicati con $x_1, x_2, \ldots, x_{2m}$ gli elementi di G, in tale omomorfismo, l'elemento y ha per immagine la permutazione di $\mathcal{S}_{2m}$

$$\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_{2m} \\ x_1y & x_2y & \ldots & x_{2m}y \end{pmatrix}$$

Ora, tenuto conto che $x_iy^2 = x_i$, si vede che la scrittura di σ come prodotto di cicli disgiunti è la seguente:

$$\sigma = (x_1, x_1y)(x_2, x_2y)\ldots(x_h, x_hy).$$

Dato che in questa scrittura compaiono tutti e soli gli elementi di G, che sono in numero di $2m$, ne segue che $2m = 2h$, ossia $m = h$. Quindi σ è prodotto di un numero *dispari* di trasposizioni disgiunte, ed è pertanto un permutazione dispari.

Si tratta ora di trovare un sottogruppo normale in G. Continuando a indicare con G la sua immagine in $\mathcal{S}_{2m}$, e indicato con A_{2m} il sottogruppo alterno in $\mathcal{S}_{2m}$, risulta

$$G/G \cap A_{2m} \simeq GA_{2m}/A_{2m} \leq \mathcal{S}_{2m}/A_{2m}$$

e quest'ultimo gruppo ha ordine 2. Quindi l'indice di $G \cap A_{2m}$ in G è o 1 o 2.

(a) Se $|G/G \cap A_{2m}| = 1$, allora G sarebbe un sottogruppo di A_{2m}, mentre G possiede almeno una permutazione dispari.
(b) Quindi $|G/G \cap A_{2m}| = 2$ e in quanto tale, $G \cap A_{2m}$ è un sottogruppo normale in G, e quindi G non è semplice.

(11) Provare che se $|G| = pqr$, con p, q er primi distinti, allora G non è semplice.

SOLUZIONE

Il numero di p-Sylow o q-Sylow o r-Sylow potrà essere:

$$N_p = 1, q, r, qr, \qquad N_q = 1, p, r, pr, \qquad N_r = 1, p, q, pq$$

Se uno di questi valori è 1, si ha un sottogruppo normale, e quindi abbiamo finito. Possiamo quindi supporre che non siano =1 e senza perdita di generalità si può supporre $p < q < r$. Da questa limitazione si vede facilmente che non può essere $N_q = p$, e così non può essere $N_r \in \{p, q\}$. Restano quindi le seguenti possibilità :

$$N_r = pq, \qquad N_q = r, pr, \qquad N_p = q, r, qr.$$

Con un conteggio di elementi tutte queste eventualità vengono scartate. Deve quindi necessariamente essere $N_p = 1$ o $N_q = 1$ o $N_r = 1$.

(12) Dimostrare che , se H e K sono due p-sottogruppi normali di un gruppo finito G, il loro prodotto è un p-sottogruppo normale in G.

SOLUZIONE

Siano H e K due sottogruppi normali. Allora il loro prodotto è normale, perché per ogni $x \in G$

$$xHKx^{-1} = xHx^{-1}xKx^{-1} = HK$$

Ora, se $|H| = p^h$ e $|K| = p^k$, allora $|H \cap K| = p^r$ con $r \leq h, k$. Allora

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = p^{h+k-r},$$

quindi si tratta di un p-gruppo.

(13) Sia H un sottogruppo normale in un gruppo G tale che $|G/H|$ e $|H|$ siano coprimi. Provare che H è unico del suo ordine in G.

SOLUZIONE

Sia K sottogruppo di G con lo stesso ordine di H, ossia $|H| = |K|$. Vogliamo provare che $K = H$. Sia

$$\pi : G \longrightarrow G/H$$

la proiezione canonica. L'immagine didel sottogruppo K è KH/H. Basta allora provare che $|KH/H| = 1$. Dall'ipotesi che $|G/H|$ e $|H|$ sono coprimi segue ovviamente che anche $|G/H|$ e $|K|$ sono coprimi e quindi anche $|KH/H|$ e $|K|$. Se non fosse $|KH/H| = 1$ vorrebbe dire che esiste un primo p che divide $|KH/H|$ e quindi anche $|KH|$. Allora dalla

$$|KH| = \frac{|K||H|}{|K \cap H|} = \frac{|K|^2}{|K \cap H|}$$

si avrebbe che p divide anche $|K|$, contro l'ipotesi.

(14) Esibire , per qualche numero primo p, un gruppo non abeliano di ordine p^3.

SOLUZIONE

Basta ad esempio prendere $p = 2$, e allora.... Oppure guardate l'esercizio che segue.

(15) Sia A il gruppo additivo degli interi modulo p $A = \{0, 1, 2, , \ldots, p - 1\}$ e sia B il gruppo additivo degli interi modulo p^2, $B = \{0, 1, 2, \ldots, p^2 - 1\}$. Sia G l'insieme di tutte le coppie $(i, j) \in A \times B$. Si definisca in G la seguente operazione:

$$(i, j) \cdot (i', j') = (i + i', j + j' + ji'p).$$

Provare che G è un gruppo non abeliano di ordine p^3.

SOLUZIONE

Ovviamente si tratta di un insieme con p^3 elementi. Quella data è effettivamente un'operazione in G. Per provare l'associatività si deve ricordare che in B $p^2 = 0$. L'elemento neutro è $(0, 0)$, l'inverso di (i, j) è $(-i, -j + jip)$. Quindi si tratta di un gruppo. Dato che

$$(1, 0)(0, 1) = (1, 1), \qquad (0, 1)(1, 0) = (1, 1 + p)$$

ne segue che il gruppo non è abeliano.

(16) Determinare, a meno di isomorfismo, tutti i gruppi con 6 elementi.

SOLUZIONE

Se è abeliano, esso sarà ovviamente isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}_6$ e quindi sarebbe ciclico. Supponiamo quindi non sia abeliano (e quindi non ciclico). Allora l'ordine dei suoi elementi sarà 2 o 3 (e 1). Dico che necessariamente avrà sia un elemento di ordine 2 sia un elemento di ordine 3.

Possiede un elemento di ordine 3: se tutti gli elementi diversi dall'identità avessero ordine 2, il gruppo sarebbe abeliano .

Possiede un elemento di ordine 2. Se così non fosse, ogni elemento diverso dall'elemento neutro avrebbe ordine 3. Ciò significa che ogni elemento diverso dall'elemento neutro potrebbe essere appaiato al suo inverso per dare un numero pari di elementi diversi dall'elemento neutro, il che è impossibile. Quindi esiste almeno un elemento di ordine 2.

Detto a un elemento di ordine 3 e b un elemento di ordine 2, in G ci saranno i seguenti elementi :

$$1, b, a, a^2, ba, ba^2$$

Dato però che in G ci deve essere anche ab, questo dovrà essere uno dei precedenti: gli unici candidati per ab sono: ba o $ba^{-1} = ba^2$. Nel primo caso si vede facilmente che ba verrebbe ad avere periodo 6. Resta quindi la presentazione di G come

$$\langle b, a : b^2 = 1 = a^3, ab = ba^{-1} \rangle$$

che sappiamo essere isomorfo al gruppo simmetrico su 3 elementi.

(17) Determinare, a meno di isomorfismo, tutti i gruppi con 8 elementi.

SOLUZIONE

Se G è abeliano di ordine 8, sarà isomorfo ad uno dei seguenti tre gruppi

$$\mathbb{Z}_8, \qquad \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, \qquad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

Supponiamo quindi G non abeliano. Nessun elemento potrà avere ordine 8 (altrimenti il gruppo sarebbe ciclico) e non tutti gli elementi potranno avere ordine 2 (altrimenti sarebbe abeliano). Quindi esiste certamente un elemento di ordine 4. sia y un tale elemento. Detto x un elemento non appartenente al sottogruppo generato da y, in G ci saranno sicuramente i seguenti elementi

$$1, y, y^2, y^3, xxy, xy^2, xy^3$$

Questi sono 8, quindi esauriscono tutti gli elementi di G. Dobbiamo quindi vedere con quali elementi tra questi coincidono gli elementi non listati, come ad esempio x^2. x^2 non può coincidere con nessuno tra x, xy, xy^2 o xy^3 (per la legge di cancellazione avrei un assurdo); non può coincidere con y o con y^3, altrimenti x avrebbe ordine 8. Quindi restano due possibilità :

(a) $x^2 = 1$. Dato che anche yx deve rientrare tra gli elementi di G, deve essere uno degli elementi $1, y, y^2, xy, xy^2, xy^3$. Si vede subito che le sole possibilità che non portino immediatamente ad una contraddizione sono $yx = xy$ o $yx = xy^3$. Ma il primo caso implica che il gruppo sia abeliano, situazione che stiamo scartando, quindi resta $yx = xy^3$. Si ottiene quindi la seguente presentazione:

$$\langle x, y : y^4 = 1 = x^2 \text{ e } yx = xy^{-1} \rangle$$

Un esempio di gruppo che verifica queste relazioni è il gruppo diedrale D_4.

(b) $x^2 - y^2$. Come nel caso precedente, yx deve necessariamente coincidere con xy^3. Si ottiene allora la seguente presentazione

$$\langle x, y : y^4 = 1, y^2 = x^2 \text{ e } yx = xy^{-1} \rangle.$$

Si tratta del gruppo dei quaternioni (che è anche isomorfo al gruppo generato dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

che abbiamo visto in un esercizio precedente.

(18) Sia G un gruppo qualsiasi e supponiamo che il gruppo degli automorfismi interni di G, $\mathrm{Int}(G)$, sia ciclico. Provare che il gruppo G è abeliano.

SOLUZIONE

Sia $\mathrm{Int}(G) = \langle \gamma_x \rangle$ per qualche $x \in G$, con $\gamma_x : G \longrightarrow G$, $y \longrightarrow xyx^{-1}$.

Sia $z \in G$. Allora $\gamma_z \in$Int $(G) = \langle \gamma_x \rangle$, da cui

$$\gamma_z = \gamma_x^n = \gamma_{x^n} \qquad \text{per un } n \in \mathbb{N}$$

Ciò significa che

$$zxz^{-1} = \gamma_z(x) = \gamma_{x^n}(x) = x^n x x^{-n} = x,$$

ossia $zx = xz$ per ogni z, ossia $x \in Z(G)$, da cui γ_x è l'identità . Ma allora $\mathrm{Int}(G) = \{id_G\}$. Ma il gruppo $\mathrm{Int}(G)$ degli automorfismi interni del gruppo G è isomorfo a $G/Z(G)$ e quindi $G = Z(G)$ e G è abeliano.

(19) Sia G un gruppo, sia A un sottogruppo normale in G e A abeliano. Provare che il coniugio induce un'azione naturale di G/A su A.

SOLUZIONE

Facciamo agire G/A su A nel modo (naturale) seguente:

$$gA * a = gag^{-1}, \qquad \forall a \in A, \ \forall g \in G.$$

Si tratta di un'azione. Infatti

(a) $gag^{-1} \in A$ perché A è un sottogruppo normale in G

(b) $*$ è ben posta, nel senso che se $g_1 A = g_2 A$, allora $g_1 a g_1^{-1} = g_2 a g_2^{-1}$: si tratta di provare che $g_2^{-1} g_1 a g_1^{-1} g_2 = a$. Dato che $g_1 B0 = g_2 B0$ vuol dire che $g_2^{-1} g_1 A = A$, cioè $g_2^{-1} g_1 \in A$. Ma A è abeliano, da cui

$$g_2^{-1} a g_1^{-1} g_2 = a g_2^{-1} g_1 (g_1^{-1} g_2) = a.$$

Il resto è standard.