Facoltà di Scienze MFN- Corso di laurea in Matematica

ALGEBRA 2 - G.M. Piacentini Cattaneo- I. Damiani -

ESERCIZI DI RIPASSO SUI GRUPPI

SOLUZIONI

(1) Siano G e G' gruppi, e $|G| = 47$, $|G'| = 40$. Può esistere un omomorfismo φ tra G e G'? Giustificare la risposta.
SOLUZIONE.
Dato che 47 è un numero primo, ogni elemento di G diverso dall'elemento neutro ha periodo 47. Ora, dato che φ è un omomorfismo di gruppi, per ogni $g \neq e$ in G si ha che $0(\varphi(g))$ divide $o(g) = 47$. Ma si ha anche $o(\varphi(g))|40$ perché $\varphi(g) \in G'$. Quindi $o(\varphi(g)) = 1$ per ogni $g \in G$, quindi l'unico omomorfismo che esiste è l'omomorfismo che manda tutti gli elementi di G nell'elemento neutro di G'.

(2) Si provi che un gruppo G che non ha ordine un numero primo possiede sottogruppi non banali.
SOLUZIONE.
Sia g un elemento di G diverso dall'elemento neutro. Si consideri il sottogruppo $\langle g \rangle$ generato da g: se $\langle g \rangle$ è contenuto propriamente in G, abbiamo trovato un sottogruppo non banale. Altrimenti deve essere $\langle g \rangle = G$, ma in tal caso G è un gruppo ciclico di ordine non primo, e in quanto tale ha certamente dei sottogruppi.

(3) Provare che se G è un gruppo tale che ogni elemento $x \neq e$ ha ordine 2 è abeliano.
SOLUZIONE
Dato che ogni elemento ha periodo 2, ogni elemento coincide con il suo inverso. Allora per ogni $x, y \in G$ $xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$.

(4) Dimostrare che se G è un gruppo di ordine 10, allora possiede un elemento di ordine 5.
SOLUZIONE.
Dal teorema di Lagrange sappiamo che i *possibili* periodi degli elementi di un gruppo di ordine n sono divisori di n. Nel nostro caso $n = 10$, quindi i possibili periodi deli elementi diversi dall'elemento neutro sono 2 e 5. Supponiamo per assurdo che non esista nessun elemento di periodo 5. Allora tutti gli elementi di G hanno periodo 2, e quindi (vedi esercizio precedente) il gruppo è abeliano. Ma allora contiene i gruppo di Klein $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, che ha ordine 4, e questo

è impossibile, perché 4 non divide 10. Quindi deve esistere almeno un elemento di periodo 5.

(5) Sia G un gruppo di ordine 8 tale che ogni x diverso dall'elemento neutro abbia periodo 2. Determinare tutti i sottogruppi di G

SOLUZIONE.

Sappiamo innanzitutto che il gruppo è abeliano (dato che ogni elemento diverso dall'identità ha periodo 2). Il gruppo conterrà quindi certamente sette sottogruppi di ordine 2. Inoltre, dati a, b, c di ordine 2, anche i loro prodotti a due a due avranno ordine due: infatti

$$(ab)^2 = a^2b^2 = 1, \quad (bc)^2 = b^2c^2 = 1, \quad (ac)^2 = a^2c^2 = 1$$

e così anche il prodotto di questi tre elementi, perché

$$(abc)^2 = a^2(bc)^2 = 1.$$

Quindi G sarà costituito dai seguenti elementi:

$$G = \{1, a, b, c, ab, bc, ac, abc\}$$

e conterrà 7 sottogruppi isomorfi al gruppo di Klein, precisamente

$$\{1, a, b, ab\}, \quad \{1, a, c, ac\}, \quad \{1, b, c, bc\}, \quad \{1, a, bc, abc\},$$
$$\{1, b, ac, abc\}, \quad \{1, c, ab, abc\}, \quad \{1, ac, bc, ab\}$$

(ciascuno generato da due elementi distinti).

In definitiva, oltre al gruppo identico e all'intero gruppo, esistono sette gruppi di ordine 2 e 7 gruppi di odine 4, isomorfi al gruppo di Klein.

(6) Sia G un gruppo che ha un sottogruppo di ordine 4 e uno di ordine 10, e l'ordine di G è minore di 50. Quali sono i possibili ordini di G?

SOLUZIONE.

$|G| = 20$ o 40.

(7) Sia G un gruppo di ordine < 50 con un sottogruppo H di ordine 6 tale che l'indice di H in G sia > 4. Quali sono i possibili ordini di G?

SOLUZIONE.

I possibili valori di $|G|$ sono $30, 36, 42$, o 48 .

(8) Sia N un sottogruppo del centro $Z(G)$ di un gruppo G.
   (a) Provare che N è un sottogruppo normale in G;
   (b) Provare che, se G/N è ciclico, allora G è abeliano.

SOLUZIONE.

(a) Ovvio (spiegarlo comunque)

(b) Se G/N è ciclico, sia Ng un suo generatore. Allora G è generato da g e N, ossia $G = \langle g, N \rangle$, ossia G è generato da un insieme di elementi tali che ogni coppia di elementi commuta. Quindi G è abeliano.

(9) Si dica se è vera o no la seguente asserzione: se ogni elemento di un gruppo G ha periodo che divide un fissato intero n, allora anche l'ordine di G divide n.

SOLUZIONE.

Falsa: si pensi ad esempio al gruppo di Klein: tutti gli elementi dividono $n = 2$ ma $|G| = 4$ non divide 2.

(10) Si dica se è vera la seguente asserzione: se G è un gruppo finito e ogni suo sottogruppo proprio è ciclico, allora G è ciclico.

SOLUZIONE.

Falsa, perché ad esempio $\mathcal{S}_3$ è tale che ogni suo sottogruppo proprio è ciclio, ma lui stesso non è ciclico.

(11) Determinare, a meno di isomorfismi, tutti i gruppi che possono essere immagini omomorfe del gruppo simmetrico $\mathcal{S}_3$.

SOLUZIONE.

Ogni gruppo che è immagine omomorfa di $\mathcal{S}_3$ è isomorfo al quoziente di $\mathcal{S}_3$ rispetto ad un suo sottogruppo normale. I sottogruppi normali di $\mathcal{S}_3$ sono $\mathcal{S}_3$, $\mathcal{A}_3 = \{id, (1,2,3), (1,3,2)\}$ e il sottogruppo ridotto al solo elemento neutro. Di conseguenza le immagini omomorfe di $\mathcal{S}_3$ sono $\{id\}$, $\mathbb{Z}_2$ e $\mathcal{S}_3$.

(12) Sia D_4 il gruppo delle simmetrie di un quadrato.

(a) Determinare tutti i suoi sottogruppi;

(b) decidere quali sono sottogruppi normali;

(c) Per ogni sottogruppo normale, studiare il gruppo quoziente;

(d) determinare il centro di D_4.

SOLUZIONE

(a) Ci sono 5 elementi di periodo 2, s, r^2, sr, sr^3, sr^2, e quindi cinque sottogruppi di ordine 2. Ci sono poi due elementi di periodo 4, r e r^3. I sottogruppi di ordine 4 sono:

$$\{e, r^2, rs, r^3s\}, \quad \{e, r, r^2, r^3\}, \quad \{e, r^2, s, r^2s\}$$

(b) Sono normali tutti i gruppi di ordine 4 e il gruppo $\{id, r^2\}$.

(c) Il centro di D_4 è $\{id, r^2\}$.

(13) Determinare il centro del gruppo D_n delle simmetrie di un n-gono regolare, per ogni $n > 2$.

SOLUZIONE

Il centro di D_n è $\{id\}$ o $\{id, r^{n/2}\}$ a seconda che n sia dispari o pari: infatti $sr^i = r^{n-i}s$ e $n - i = i$ se e solo se $i = 0$ o $n = 2i$.

(14) Sia G un gruppo e sia x un suo elemento. Indicato con $C_G(x)$ il centralizzante di x in G, ossia

$$C_G(x) := \{g \in G \mid gx = xg\}$$

(a) provare che $C_g(x)$ è un sottogruppo di G;
(b) determinare $C_G(1)$;
(c) posto $G = GL(2, \mathbb{Z}_5)$ (gruppo delle matrici 2×2 invertibili a elementi in $\mathbb{Z}_5$), e posto

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

descrivere $C_G(x)$ e determinare la sua cardinalità e il suo indice;
(d) provare che

$$T^+ = \{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{Z}_5\}$$

è un sottogruppo contenuto in $C_G(x)$;
(e) provare che T^+ è isomorfo a $(\mathbb{Z}_5, +)$;
(f) determinare il gruppo degi automorfismi di T^+;
(g) provare che $C_G(x)$ è ciclico;
(h) calcolare il gruppo degli automorfismi di $C_G(x)$.

SOLUZIONE

(a) Lasciato per esercizio.
(b) $C_G(1)$ ovviamente coincide con tutto G.
(c) Sia $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un elemento arbitrario di $C = C_G(x)$. Imponendo la condizione che commuti con x si ottengono le condizioni $c = 0$ e $a = d$. D'altra parte tutte le matrici della forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{Z}_5$ e $a \neq 0$ commutano effettivamente con x. Quindi

$$C_G(x) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_5, a \neq 0\}.$$

La cardinalità di $C_G(x)$ è 20. Dato che la cardinalità di G è $(5^2 - 1)(5^2 - 5) = 24 \cdot 20$, segue che l'indice è 24.

(d) Abbiamo appena descritto $C_G(x)$ e quindi tra i suoi elementi ci sono quelli che stanno in T^+. Lasciamo la semplice verifica che T^+ è un sottogruppo.

(e) Definiamo la seguente applicazione

$$f : (\mathbb{Z}_5, +) \longrightarrow T^+$$

ponendo

$$f(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

E' facile vedere che si tratta di un isomorfismo tra gruppi.

(f) per calcolare il gruppo degli automorfismi di T^+ possiamo sfruttare l'isomorfismo appena dato e ricordare che $Aut(\mathbb{Z}_5) \simeq (U(\mathbb{Z}_5), \cdot) \simeq (\mathbb{Z}_4, +)$

(g) Per provare che è ciclico si può individuare tra i suoi elementi un elemento di periodo 20. E' però [più facile osservare che è isomorfo al prodotto diretto di due gruppi ciclici di ordini relativamente primi, precisamente

$$D = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}\}$$

che è isomorfo a $U(\mathbb{Z}_5), \cdot) \simeq (\mathbb{Z}_4, +)$ e T^+. Quindi $C \simeq D \times T^+ \simeq \mathbb{Z}_4 \times Z_5 \simeq Z_{20}$.

(h) Chiaramente il gruppo degli automorfismi di $C_G(x)$ è isomorfo al gruppo degli automorfismi di $\mathbb{Z}_{20}$ che è isomorfo a $(U(\mathbb{Z}_{20}), \cdot)$. Questo gruppo ha ordine 8, è abeliano e si prova che è isomorfo a $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$.

(15) Sia G un gruppo e H un suo sottogruppo. Ricordiamo che il normalizzante di H in G è definito come

$$N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}.$$

(a) Provare che $C_G(H)$ è un sottogruppo normale in $N_G(H)$;

(b) provare che $N_G(H)/C_G(H)$ è isomorfo ad un sottogruppo del gruppo $Aut(H)$ di tutti gli automorfismi di H.

SOLUZIONE

(a) Per ogni $a \in N_G(H)$ l'applicazione

$$\bar{a} : x \longrightarrow axa^{-1} \qquad (x \in H)$$

è un automorfismo di H (precisamente la restrizione ad H del corrispondente automorfismo interno di $N_G(H)$). Si verifica facilmente che l'applicazione

$$a \longrightarrow \bar{a}$$

da $N_G(H)$ è un omomorfismo di $N_G(H)$ in qualche sottogruppo K di $Aut(H)$. Dato che $\bar{a} = 1$ se e solo se $ax = xa$ per ogni $x \in H$, il nucleo dell'omomorfismo è il centralizzante $C_G(H)$. Quindi $N_G(H)/C_G(H) \simeq K$.

(16) Provare per induzione du n che le $n-1$ trasposizioni

$$(1,2), \quad (1,3), \quad (1,4), \quad \ldots (1,n)$$

generano tutto $\mathcal{S}_n$.

SOLUZIONE. Per $n = 2$ (base dell'induzione) il risultato è ovviamente vero.

Supponiamo quindi vero il risultato per $n-1$ e dimostriamolo per n. Sia $\sigma \in \mathcal{S}_n$ e sia $\sigma(n) = m$ ossia supponiamo che σ mandi n in m. Allora la permutazione

$$\sigma' = (1,n)(1,m)\ \sigma$$

lascia fisso n. In virtù dell'ipotesi induttiva, σ' è prodotto di trasposizioni del tipo $(1,2), \quad (1,3), \quad (1,4), \quad \ldots (1,n)$. Ma allora anche σ lo è .