ANCORA GRUPPI

(1) In $GL(2,\mathbb{C})$ si consideri il sottogruppo H generato dalle due matrici
$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
Determinare l'ordine di tale sottogruppo, scrivendo esplicitamente tutti i suoi elementi e i rispettivi periodi. Si dica se il sottogruppo è ciclico e/o abeliano. Indicato con g l'unico elemento di periodo 2, si dica se il sottogruppo da esso generato è normale in H e se è normale in $GL(2,\mathbb{C})$. Provare che tale gruppo è isomorfo al gruppo dei quaternioni.

(2) Provare che tutti i gruppi di ordini compresi tra 61 e 71 (inclusi) sono risolubili.

(3) Provare che un gruppo con 24 elementi o contiene un sottogrupppo normale di ordine 8, oppure un sottogruppo normale di ordine 4. Inoltre provare che contiene un sottogruppo normale di indice al più 3.

(4) Provare che un gruppo di ordine 36 è risolubile.

(5) Sia p un primo e sia $G = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \ldots \times \mathbb{Z}_p$ il prodotto diretto di n copie di $\mathbb{Z}_p$. Provare che il gruppo degli automorfismi di G è isomorfo al grupo $GL(n,p)$ delle matrici invertibili $n \times n$ a elementi in $\mathbb{Z}_p$.

(6) Provare che un gruppo di ordine 48 non è semplice.

(7) Determinare il numero dei p-Sylow del gruppo simmetrico $\mathcal{S}_p$ su p elementi, p numero primo.

(8) Provare che se $|G| \leq 20$, allora o G ha p elementi (p primo) oppure G non è semplice.

(9) Dimostrare che se $|G| = mn$ e G possiede un sottogruppo H di ordine n, con n privo di fattori primi minori di m, allora H è normale in G.

(10) Provare che ogni gruppo G di ordine $|G| = 2m$ con m dispari non è semplice.

(11) Provare che se $|G| = pqr$, con p, q er primi distinti, allora G non è semplice.

(12) Dimostrare che , se H e K sono due p-sottogruppi normali di un gruppo finito G, il loro prodotto è un p-sottogruppo normale in G.

(13) Sia H un sottogruppo normale in un gruppo G tale che $|G/H|$ e $|H|$ siano coprimi. Provare che H è unico del suo ordine in G.

(14) Esibire , per qualche numero primo p, un gruppo non abeliano di ordine p^3.

(15) Sia A il gruppo additivo degli interi modulo p $A = \{0, 1, 2, , \dots, p-1\}$ e sia B il gruppo additivo degli interi modulo p^2, $B = \{0, 1, 2,' \dots, p^2-1\}$. Sia G l'insieme di tutte le coppie $(i, j) \in A \times B$. Si definisca in G la seguente operazione:

$$(i, j) \cdot (i', j') = (i + i', j + j' + ji'p).$$

Provare che G è un gruppo non abeliano di ordine p^3.

(16) Determinare, a meno di isomorfismo, tutti i gruppi con 6 elementi.

(17) Determinare, a meno di isomorfismo, tutti i gruppi con 8 elementi.

(18) Sia G un gruppo qualsiasi e supponiamo che il gruppo degli automorfismi interni di G, $\mathrm{Int}(G)$, sia ciclico. Provare che il gruppo G è abeliano.

(19) Sia G un gruppo, sia A un sottogruppo normale in G e A abeliano. Provare che il coniugio induce un'azione naturale di G/A su A.