Facoltà di Scienze MFN- Corso di laurea in Matematica

ALGEBRA 2 - G.M. Piacentini Cattaneo -

RIEPILOGO SUI GRUPPI

(1) Sia G l'insieme di tutte le matrici reali della forma

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto al prodotto.
(a) Verificare che si tratta di un gruppo.
(b) Provare che si tratta di un gruppo risolubile.

(2) Siano H e K due gruppi risolubili. Provare che il loro prodotto diretto $H \times K$ è risolubile.

(3) Provare che ogni gruppo di ordine 30 possiede un sottogruppo ciclico normale in G di ordine 15.

(4) Sia G un sottogruppo di $\mathcal{S}_4$, e si consideri l'azione naturale di G sull'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$. Per ciascuna delle seguenti scelte di G scrivere le orbite dell'azione e trovare lo stabilizzatore. Verificare la formula

$$|G| = |\mathcal{O}(x)||St_x|.$$

(a) $G = \langle(1, 2, 3)\rangle$;
(b) $G = \langle(1, 2, 3, 4)\rangle$;
(c) $G = \{id, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}$;
(d) $G = \{id, (1, 2), (3, 4), (1, 2)(3, 4)\}$;
(e) $G = A_4$.

(5) Data la permutazione $(1, 2) \in \mathcal{S}_n$, quante sono le permutazioni che commutano con $(1, 2)$?

(6) Quante sono le permutazioni che commutano con $(1, 2, 3, 4, \ldots n)$?

(7) Quanti sono e quali sono i gruppi abeliani non isomorfi di ordine 144?

(8) Determinare l'ordine massimo tra gli elementi dei seguenti gruppi:
(a) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$

(b) $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{21}$
(c) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{15}$

(9) Determinare i p-Sylow dei gruppi dell'esercizio precedente e la decomposizione in prodotto di gruppi ciclici del teorema fondamentale dei gruppi abeliani finiti. Verificare il risultato dell'esercizio precedente.

(10) Provare che ogni gruppo di ordine p^2q, p, q primi distinti, non è semplice.

(11) Provare che ogni gruppo di ordine p^2q è risolubile.

(12) Sia G un gruppo tale che $|G| = p^3 \cdot q$, p, q primi. Provare che G possiede o un p-Sylow normale o un q-Sylow normale, oppure $p = 2$, $q = 3$ e $|G| = 24$.

(13) Sia G un gruppo, finito e sia S un $p-$ Sylow, (p divisore primo di $|G|$). Provare che se P è un p-sottogruppo di $N_G(S)$, allora $P \subseteq S$.

(14) Determinare tutti i gruppi di ordine 177.

(15) Sia G un gruppo abeliano finito. Provare l'equivalenza delle seguenti affermazioni:
(a) G possiede un p-Sylow *ciclico* per ogni p divisore di $|G|$;
(b) G è ciclico
(c) G possiede un unico sottogruppo di ordine p per ogni p divisore primo di $|G|$.

(16) Sia G un gruppo che possiede un sottogruppo normale N risolubile tale che anche il quoziente G/N sia risolubile. Provare che G è risolubile.

(17) In quanti modi diversi si possono disporre due chiavi rosse e due chiavi verdi in un portachiavi circolare? Dare una spiegazione in termini di azioni e orbite.

(18) Sia G un gruppo di ordine 117. Decidere se è sempre risolubile. In caso positivo, costruire una catena.

(19) (a) Dare un esempio di gruppo semplice;
(b) dare un esempio di gruppo non semplice;
(c) dare un esempio di gruppo risolubile;
(d) dare un esempio di gruppo non risolubile.

(20) Sia G un gruppo di ordine 319.
  (a) provare che G è ciclico;
  (b) determinare tutti i possibili ordini degli elementi di G e per ogni ordine m il numero di elementi di G aventi ordine m.

(21) Determinare tutti i gruppi di ordine 289.

(22) (a) Determinare quanti gruppi abeliani non isomorfi ci sono di ordine 2800 e 13270.
  (b) Per ciascun tipo determinarne uno.

(23) (a) Quali dei seguenti gruppi sono isomorfi tra di loro?

$$\mathbb{Z}_{209} \times \mathbb{Z}_{211}, \qquad \mathbb{Z}_{46189}, \qquad \mathbb{Z}_{143} \times \mathbb{Z}_{323}.$$

  (b) Per ciascuno dei precedenti gruppi determinare i periodi dei suoi elementi.

(24) Determinare tutti i gruppi abeliani semplici.