Facoltà di Scienze MFN- Corso di laurea in Matematica

**ALGEBRA 2** - G.M. Piacentini Cattaneo- I. Damiani -

---

GRUPPI- AZIONI DI GRUPPI-

(1) (a) Determinare tutti i sottogruppi del gruppo dei quaternioni

$$\mathcal{Q} = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$$

con le regole

$$ij = k, \qquad jk = i, \qquad ki = j, \qquad ji- = k, \qquad ,kj = -i, \qquad ik = -j$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

(b) Determinare le classi coniugate di $\mathcal{Q}$.

(2) Determinare il numero di anagrammi della parola "MASSIMA".

(3) Sia $G = \mathcal{S}_3$ il gruppo simmetrico su 3 elementi. Se $x = (1, 2, 3)$, provare che $C(x)$ coincide con il gruppo ciclico generato da $x$.

(4) Chi è $C(x)$ nel caso in cui sia $G = \mathcal{S}_n$ e $x = (1, 2, 3, \ldots, n)$?

(5) Sia $G$ il gruppo $\mathcal{S}_3$. Determinare $N_G(H)$ se $H$ è
(a) il sottogruppo $\langle(1, 2, 3)\rangle$;
(b) il sottogruppo $\langle(1, 2)\rangle$.

(6) Si faccia agire il gruppo $(\mathbb{Z}, +)$ su $\mathbb{R}$ per traslazione, ossia ponendo

$$a * x := n + x, \qquad a \in \mathbb{Z},\ x \in \mathbb{R}.$$

Provare che si tratta di un'azione. Determinare lo stabilizzatore di ogni elemento di $\mathbb{R}$. Decidere se l'azione è transitiva.

(7) Si faccia agire i gruppo $(\mathbb{Z}, +)$ su $\mathbb{R}$ al modo seguente:

$$a * x := (-1)^a x.$$

Provare che si tratta di un'azione. Determinare lo stabilizzatore di un elemento $x$ di $\mathbb{R}$. Determinare l'orbita di ogni elemento.

(8) Sia $X := \{$ lati di un cubo$\}$

Si consideri l'azione del gruppo $(\mathbb{Z}_4, +)$ su $X$ ottenuta ruotando il cubo attorno alla perpendicolare $a$ passante per i centri dei lati $ABCD$ e $FGHE$ dell'angolo di $\frac{\pi}{2}$. Posto $r :=$ permutazione di $X$ indotta da questa rotazione, l'azione in questione è

$$\varphi : \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathcal{S}_X$$
$$\varphi(m) = r^m.$$

Studiare questa azione (orbite, stabilizzatori, ecc. ) e verificare il teorema di Burnside sul numero di orbite.

(9) Sia $X$ la sfera unitaria di $\mathbb{R}_3$, sia $G$ il gruppo ortogonale $SO_3$. Si ha un'azione naturale di $SO_3$ su $X$, dato che $SO_3$ conserva le distanze: una matrice $A \in S)_3$ manda un vettore unitario $x \in X$ nel vettore unitario $Ax$. Studiare questa azione.

(10) Sia $G$ il gruppo di tutte le simmetrie di un cubo, ossia il gruppo di tutti i movimenti rigidi nello spazo tridimensionale che mutano il cubo in sé .

Ogni movimento rigido del cubo determina una permutazione dei vertici del cubo. Quindi l'insieme su cui agisce è l'insieme $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dei vertici del cubo.

Studiare questa azione e, studiando orbite e stabilizzatori, trovare la cardinalità di $G$.

(11) Determinare la cardinalità del gruppo delle rotazioni del tetraedro regolare studiando la sua azione sulle facce del tetraedro.