Facoltà di Scienze MFN- Corso di laurea in Matematica

**ALGEBRA 2** - G.M. Piacentini Cattaneo- I. Damiani -

ESERCIZI DI RIPASSO SUI GRUPPI

(1) Siano $G$ e $G'$ gruppi, e $|G| = 47$, $|G'| = 40$. Può esistere un omomorfismo tra $G$ e $G'$? Giustificare la risposta.

(2) Si provi che un gruppo che non ha ordine un numero primo possiede sottogruppi non banali.

(3) Provare che se $G$ è un gruppo tale che ogni elemento $x \neq e$ ha ordine 2 è abeliano.

(4) Dimostrare che se $G$ è un gruppo di ordine 10, allora possiede un elemento di ordine 5.

(5) Sia $G$ un gruppo di ordine 8 tale che ogni $x$ diverso dall'elemento neutro abbia periodo 2. Determinare tutti i sottogruppi di $G$.

(6) Sia $G$ un gruppo che ha un sottogruppo di ordine 4 e uno di ordine 10, e l'ordine di $G$ è minore di 50. Quali sono i possibili ordini di $G$?

(7) Sia $G$ un gruppo di ordine $< 50$ con un sottogruppo $H$ di ordine 6 tale che l'indice di $H$ in $G$ sia $> 4$. Quali sono i possibili ordini di $G$?

(8) Sia $N$ un sottogruppo del centro $Z(G)$ di un gruppo $G$.
  (a) Provare che $N$ è un sottogrupp normale in $G$;
  (b) Provare che, se $G/N$ è ciclico, allora $G$ è abeliano.

(9) Si dica se è vera o no la seguente asserzione: se ogni elemento di un gruppo $G$ ha periodo che divide un fissato intero $n$, allora anche l'ordine di $G$ divide $n$.

(10) Si dica se è vera la seguente asserzione: se $G$ è un gruppo finito e ogni suo sottogruppo proprio è ciclico, allora $G$ è ciclico.

(11) Determinare, a meno di isomorfismi, tutti i gruppi che possono essere immagini omomorfe del gruppo simmetrico $\mathcal{S}_3$.

(12) Sia $D_4$ il gruppo delle simmetrie di un quadrato.
  (a) Determinare tutti i suoi sottogruppi;
  (b) decidere quali sono sottogruppi normali;
  (c) Per ogni sottogruppo normale, studiare il gruppo quoziente;
  (d) determinare il centro di $D_4$.

(13) Determinare il centro del gruppo $D_n$ delle simmetrie di un $n$-gono regolare, per ogni $n > 2$.

(14) Sia $G$ un gruppo e sia $x$ un suo elemento. Indicato con $C_G(x)$ il centralizzante di $x$ in $G$, ossia

$$C_G(x) := \{g \in G \mid gx = xg\}$$

(a) provare che $C_g(x)$ è un sottogruppo di $G$;
(b) determinare $C_G(1)$;
(c) posto $G = GL(2, \mathbb{Z}_5)$ (gruppo delle matrici $2 \times 2$ invertibili a elementi in $\mathbb{Z}_5$), e posto

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

descrivere $C_G(x)$ e determinare la sua cardinalità e il suo indice;
(d) provare che

$$T^+ = \{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{Z}_5\}$$

è un sottogruppo contenuto in $C_G(x)$ ;
(e) provare che $T^+$ è isomorfo a $(\mathbb{Z}_5, +)$;
(f) determinare il gruppo degi automorfismi di $T^+$;
(g) provare che $C_G(x)$ è ciclico;
(h) calcolare il gruppo delgi automorfismi di $C_G(x)$.

(15) Sia $G$ un gruppo e $H$ un suo sottogruppo. Ricordiamo che il normalizzante di $H$ in $G$ è definito come

$$N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}.$$

(a) Provare che $C_G(H)$ è un sottogruppo normale in $N_G(H)$;
(b) provare che $N_G(H)/C_G(H)$ è isomorfo ad un sottogruppo del gruppo $Aut(H)$ di tutti gli automorfismi di $H$.

(16) Provare per induzione su $n$ che le $n - 1$ trasposizioni

$$(1, 2), \quad (1, 3), \quad (1, 4), \quad \dots (1, n)$$

generano tutto $\mathcal{S}_n$

(17) Sia $Q$ il sottogruppo del gruppo $(GL(2, \mathbb{C}), \cdot)$ generato dalle due matrici

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

dove $i$ è l'unità immaginaria. Provare
(a) $Q$ è un gruppo non abeliano di ordine 8
(b) ogni sottogruppo di $Q$ è normale in $Q$