ESERCIZI DI ALGEBRA 2

31-10-2007

N.B.: il simbolo contrassegna gli esercizi più complessi.

. . . .

[1] — Dato un gruppo G e un campo $\mathbb{K}$, si consideri l'insieme

$$\mathbb{K}[G] \ := \ \Big\{ \textstyle\sum_{g \in G} c_g \, g \ \Big| \ c_g \in \mathbb{K} \ \ \forall \, g \in G \, , \ \big\{ g \in G \, \big| \, c_g \neq 0 \big\} \ \text{è finito} \Big\}$$

(in breve, $\mathbb{K}[G]$ è lo spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ con base G), e si definisca:

$$\Big(\textstyle\sum_{g \in G} a_g \, g \Big) \oplus \Big(\textstyle\sum_{g \in G} b_g \, g \Big) \ := \ \textstyle\sum_{g \in G} (a_g + b_g) \, g$$

$$\Big(\textstyle\sum_{g \in G} a_g \, g \Big) \odot \Big(\textstyle\sum_{g \in G} b_g \, g \Big) \ := \ \textstyle\sum_{g \in G} \Big(\sum_{\substack{h,k \in G \\ h\,k = g}} a_h \, b_k \Big) \, g$$

per ogni $\sum_{g \in G} a_g \, g \in \mathbb{K}[G]$, $\sum_{g \in G} a_g \, g \in \mathbb{K}[G]$.

(a) Dimostrare che le suddette formule definiscono due operazioni binarie in $\mathbb{K}[G]$.

(b) Dimostrare che $\big(\mathbb{K}[G] \, ; \oplus \, , \odot \big)$ è un anello unitario.

(c) Dimostrare che l'anello $\big(\mathbb{K}[G] \, ; \oplus \, , \odot \big)$ è commutativo se e soltanto se il gruppo G è commutativo.

[2] — Sia R un anello, $n \in \mathbb{N}_+$, e sia $A_R := \mathit{Mat}\big(n \times n \, , R\big)$ l'anello delle matrici $n \times n$ a coefficienti in R. Per ogni sottoinsieme $T \subseteq R$, si consideri il sottoinsieme $I_T := \mathit{Mat}\big(n \times n \, , T\big)$ di A_R composto da tutte le matrici a coefficienti in T.

Dimostrare che:

(a) Se T è un *sottoanello* di R, allora I_T è un *sottoanello* di A_R.

(b) Se T è un *ideale sinistro* di R, allora I_T è un *ideale sinistro* di A_R.

(c) Se T è un *ideale destro* di R, allora I_T è un *ideale destro* di A_R.

(d) Se T è un *ideale (bilatero)* di R, allora I_T è un *ideale (bilatero)* di A_R.

[3] — Si consideri il gruppo dei quaternioni

$$H_8 := \{ 1 , -1 , i , -i , j , -j , k , -k \}$$

con l'operazione data da

$$i\,j = k\,,\;\; j\,k = i\,,\;\; k\,i = j\,,\;\; j\,i = -k\,,\;\; k\,j = -i\,,\;\; i\,k = -j\,,\;\; i^2 = j^2 = k^2 = -1\,,\;\; (-1)^2 = 1$$
$$1\,x = x = x\,1\,,\;\; (-1)\,x = -x = x\,(-1) \quad \forall\, x \in \{ i , -i , j , -j , k , -k \}\,, \;\text{ con }\; -(-x) := x$$

(a) Si dimostri che $\{ 1 , -1 \}$ è un sottogruppo normale e caratteristico di H_8 .

(b) Si determinino tutti i sottogruppi del gruppo quoziente $H_8 \big/ \{ 1 , -1 \}$, precisando quali tra essi siano normali.

[4] — Sia Γ un gruppo abeliano finito, e siano $\gamma_1 , \ldots , \gamma_k \in \Gamma$, con $k > |\Gamma|$. Dimostrare che esistono indici $(1 \leq)\; i_1 < \cdots < i_h \;(\leq k)$ tali che

$$\gamma_{i_1} + \cdots + \gamma_{i_h} = 0_\Gamma$$

dove 0_Γ è l'elemento neutro del gruppo Γ .

[5] — Determinare tutti gli ideali degli anelli

$$\mathbb{Z}_{165} \qquad \text{e} \qquad \mathbb{Q}[x] \Big/ \big(2\,x^3 + 5\,x^2 - 28\,x - 15 \big)$$

precisando quali tra essi siano primi e quali siano massimali.

[6] — Dimostrare che l'ideale $I := \big(\overline{3} , x - \overline{5} \big)$ dell'anello $\mathbb{Z}_{12}[x]$ è massimale.

[7] — Dimostrare che l'anello quoziente

$$A := \mathbb{Q}[x, y, z] \Big/ \big(x - 2\,y + 3 , y + 5 , z^2 - 3\,yz + 6 \big)$$

è un campo.

[8] — Sia G un gruppo. Dimostrare che se il gruppo $Int(G)$ degli automorfismi interni di G è ciclico, allora il gruppo G è abeliano.

[9] - ☡ — Dimostrare che il gruppo $Aut\big(\mathbb{Q}[x]\big)$ degli automorfismi dell'anello dei polinomi $\mathbb{Q}[x]$ è isomorfo al gruppo $Aff_{\mathbb{Q}}$ delle affinità del campo $\mathbb{Q}$.

[10] - — Sia $\mathbb{K}$ un campo. Dimostrare che il gruppo $Aut_A\big(\mathbb{K}[x]\big)$ degli automorfismi (di anello) dell'anello dei polinomi $\mathbb{K}[x]$ è isomorfo al prodotto semidiretto di gruppi $Aut_A(\mathbb{K}) \ltimes_\Phi Aff_\mathbb{K}$, dove $Aff_\mathbb{Q}$ è il gruppo delle affinità del campo $\mathbb{K}$, e Φ è il morfismo di gruppi

$$\Phi\colon Aut_A(\mathbb{K}) \longrightarrow Aut_G\big(Aff_\mathbb{K}\big) \quad , \quad \tau \mapsto \Phi(\tau)\begin{pmatrix} Aff_\mathbb{K} \longrightarrow Aff_\mathbb{K} \\ \sigma_{a,b} \mapsto \sigma_{\tau(a),\tau(b)} \end{pmatrix} \quad .$$

[11] - — Studiare il gruppo $Aut_G\big(H_8\big)$ degli automorfismi (di gruppo) del gruppo dei quaternioni $H_8 = \big\{\, 1 \,,\, -1 \,,\, i \,,\, -i \,,\, j \,,\, -j \,,\, k \,,\, -k \,\big\}$.

[12] - — Dato un gruppo G, siano

$$\begin{aligned} \lambda\colon G \hookrightarrow \mathcal{S}(G) \;, \quad g \mapsto \lambda_g \begin{pmatrix} G \hookrightarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow G \\ x \mapsto \lambda_g(x) := g\,x \end{pmatrix} \\ \rho\colon G \hookrightarrow \mathcal{S}(G) \;, \quad g \mapsto \rho_g \begin{pmatrix} G \hookrightarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow G \\ x \mapsto \rho_g(x) := x\,g^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i monomorfismi di gruppi dati dal Teorema di Cayley (per gruppi), e si ponga

$$\lambda(G) := Im(\lambda) \quad , \quad \rho(G) := Im(\rho) \quad .$$

Si considerino poi

$$\begin{aligned} C\big(\lambda(G)\big) \; &:= \; \big\{\, \sigma \in \mathcal{S}(G) \;\big|\; \sigma \circ \lambda_g = \lambda_g \circ \sigma \,, \;\; \forall\, g \in G \,\big\} \\ C\big(\rho(G)\big) \; &:= \; \big\{\, \tau \in \mathcal{S}(G) \;\big|\; \tau \circ \rho_g = \rho_g \circ \tau \,, \;\; \forall\, g \in G \,\big\} \,. \end{aligned}$$

Dimostrare che

$$C\big(\lambda(G)\big) \, = \, \rho(G) \quad , \qquad C\big(\rho(G)\big) \, = \, \lambda(G) \quad .$$

[13] - — Dato un anello commutativo e unitario A, siano

$$\begin{aligned} \lambda\colon A \hookrightarrow End_G\big((A\,;+)\big) \;, \quad a \mapsto \lambda_a \begin{pmatrix} A \hookrightarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow A \\ x \mapsto \lambda_a(x) := a\,x \end{pmatrix} \\ \rho\colon A \hookrightarrow End_G\big((A\,;+)\big) \;, \quad a \mapsto \rho_a \begin{pmatrix} A \hookrightarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow A \\ x \mapsto \rho_a(x) := x\,a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i monomorfismi di anelli dati dal Teorema di Cayley (per anelli), e si ponga

$$\lambda(A) := Im(\lambda) \quad , \quad \rho(A) := Im(\rho) \quad .$$

Si considerino poi

$$\begin{aligned} C\big(\lambda(A)\big) \; &:= \; \big\{\, \sigma \in End_G\big((A\,;+)\big) \;\big|\; \sigma \circ \lambda_a = \lambda_a \circ \sigma \,, \;\; \forall\, a \in A \,\big\} \\ C\big(\rho(A)\big) \; &:= \; \big\{\, \tau \in End_G\big((A\,;+)\big) \;\big|\; \tau \circ \rho_a = \rho_a \circ \tau \,, \;\; \forall\, a \in A \,\big\} \,. \end{aligned}$$

Dimostrare che

$$C\big(\lambda(A)\big) \, = \, \rho(A) \quad , \qquad C\big(\rho(A)\big) \, = \, \lambda(A) \quad .$$