

POLINOMI SIMMETRICI E VARIE

- (1) Dette  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  le radici del polinomio

$$x^3 - 29x^2 + 24x - 4,$$

determinare il polinomio monico a coefficienti in  $\mathbb{Q}$  che ha per radici  $\alpha^2$ ,  $\beta^2$ ,  $\gamma^2$ .

- (2) Si dica se è possibile esprimere il seguente polinomio nelle indeterminate  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$

$$x_2^2 x_3^2 - 2x_3^2 - 2x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_1^2 x_2^2 - 2x_1^2$$

come polinomio nelle funzioni simmetriche elementari. In caso positivo si determini tale espressione.

- (3) Sia  $f(x)$  il polinomio

$$x^3 + 3x^2 - 6x + 3.$$

Dette  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  le tre radici di  $f(x)$ , si determini il polinomio che ha per radici

$$\frac{1}{\alpha^2}, \quad \frac{1}{\beta^2}, \quad \frac{1}{\gamma^2}.$$

- (4) Dato il polinomio  $x^3 + 3x^2 + 7x - 2$  e dette  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  le sue radici, trovare i polinomi monici che abbiano radici rispettivamente

(a)  $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ ;

(b)  $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \alpha + \gamma$ ;

(c)  $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ .

- (5) Siano  $\alpha_1, \alpha_2$  e  $\alpha_3$  le radici (non conosciute) del polinomio

$$x^3 + 5x^2 - 2x + 1.$$

Determinare il polinomio monico che ha per radici  $\alpha_1 + \alpha_2$ ,  $\alpha_1 + \alpha_3$  e  $\alpha_2 + \alpha_3$ .

- (6) Determinare la somma dei cubi delle radici del polinomio

$$f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1.$$

- (7) Dire se l'intero 245 è esprimibile o no come somma di quadrati. In caso positivo scrivere una tale decomposizione.

- (8) Dire se gli interi 9240 e 11858 sono esprimibili come somme di quadrati in  $\mathbb{Z}$ . In caso positivo scrivere una tale espressione.

- (9) Determinare tutti i massimi comun divisori in  $\mathbb{Z}[i]$  tra  $10 + 11i$  e  $8 + i$ .
- (10) Si consideri l'anello  $\mathbb{Z}$  degli interi con la solita addizione, ma con moltiplicazione definita ponendo  $a \cdot b = 0 \forall a, b \in \mathbb{Z}$ . Trovare, se esiste, un ideale massimale di  $\mathbb{Z}$  che non è primo.