Facoltà di Scienze MFN- Corso di laurea in Matematica

ALGEBRA 2 - G.M. Piacentini Cattaneo -

ESERCIZI SUGLI ANELLI

(1) Sia $R := \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
 (a) Dire se si tratta di un dominio d'integrità .
 (b) Provare che in R l'ideale $(3, \sqrt{-5} - 1)$ non è principale.
 (c) Determinare gli elementi invertibili di R.
 (d) Dire se si tratta di un dominio a fattorizzazione unica.
 (e) Dire se è un dominio euclideo.

(2) Nell'anello $\mathbb{Z}[i]$ degli interi di Gauss determinare

$$\text{MCD } (3 + 3i, -1 + 3i).$$

(3) Dividere in $\mathbb{Z}[i]$ i seguenti due interi di Gauss:

$$z_1 = 4 + 3i, \qquad z_2 = 2 + 5i$$

(4) Sia R un anello commutativo. Si definiscano in $E = R \times R$ due operazioni $\oplus$ e $\otimes$ al modo seguente:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a = c, b + d),$$
$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac + bd, bc + ad).$$

Si provi che E è un anello con divisori dello zero. Si provi che se R è un dominio d'integrità , allora i divisori dello zero di E hanno la forma (a, a) e $(a, -a)$.

(5) Sia R un anello commutativo con unità . Provare che se a è un elemento nilpotente, allora $1 - a$ è invertibile in R.

(6) Decidere se l'anello $\mathbb{Z}[x, y, z]/(xy + 1, x - y)$ è un dominio a fattorizzazione unica.

(7) Sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di un insieme X, dotato della struttura di anello rispetto alle operazioni cosiì definite:

$$A + B := (A \cup B) \cap \mathcal{C}(A \cap B), \qquad A \cdot B := A \cap B$$

 (a) Decidere se $\mathcal{P}(X)$ è un dominio di integrità e, nel caso in cui non lo sia, determinare i divisori dello zero.
 (b) Descrivere tutti gli ideali principali di $\mathcal{P}(X)$.

(8) Sia A un anello commutativo e siano $a, b \in A$. Supponiamo che esistano interi positivi m, n , $(m, n) = 1$ tali che $a^m = b^n$ e $a^n = b^n$. Decidere quando si può concludere che $a = b$.

(9) Elencare tutti gli ideali dell'anello

$$\mathbb{Z}[i]/(7(3 - i)).$$

(10) Sia A un anello commmutativo.
  (a) Provare che la somma o differenza di due elementi nilpotenti di A è ancora un elemento nilpotente di A.
  (b) Provare che un polinomio a coefficienti in A è nilpotente in $A[x]$ se e solo se i suoi coefficienti sono nilpotenti in A. (Suggerimento: usare un procedimento induttivo).

(11) Sia p un primo e sia $\mathbb{Z}_{(p)} := \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid p \text{non divide } n\}$.
  (a) Provare che $\mathbb{Z}_{(p)}$ è un sottoanello di $\mathbb{Q}$;
  (b) determinare gli elementi invertibili in $\mathbb{Z}_{(p)}$;
  (c) determinare gli ideali di $\mathbb{Z}_{(p)}$;
  (d) determinare gli ideali primi e massimali di $\mathbb{Z}_{(p)}$.

(12) Sia A un anello commutativo e I e J due ideali di A. Provare che:
  (a) $(I : J) := \{a \in A \mid ij \in I \; \forall \; j \in J\}$ è un ideale di A;
  (b) $I \subset (I : J)$;
  (c) $(I : J)J \subset I$;
  (d) $(I : I + J) = (I : J)$.

(13) Provare che un ideale massimale di $\mathbb{Z}[x]$ non può essere principale.

(14) Descrivere gli ideali massimali dell'anello $\mathbb{Z}[x]$.

(15) Studiare gli elementi nilpotenti dell'anello $\mathbb{Z}_n$.