TEST DI VERIFICA DI ALGEBRA 2

21 Dicembre 2007 — azioni di gruppi, anelli speciali, estensioni di campi

. . . .

N.B.: il simbolo ☡ contrassegna gli esercizi più complessi.

1 — Determinare il numero di anagrammi dell'esclamazione "MAMMAMIA".

☡ **2** — Determinare in quanti modi si possa colorare un ottagono regolare in modo che abbia quattro lati bianchi e quattro lati neri.

3 — Dato il gruppo simmetrico $\mathcal{S}_8$, si consideri la sua azione naturale sull'insieme $X_8 := \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Sia poi $H := \big\langle (1,3,4)(7,8), (2,8,3,7) \big\rangle$ il sottogruppo di $\mathcal{S}_8$ generato dalle permutazioni $(1,3,4)(7,8)$ e $(2,8,3,7)$, e si consideri l'azione di H su X_8 indotta (per restrizione) da quella di $\mathcal{S}_8$.

(a) Calcolare le orbite dell'azione di H su X_8.

(b) Per ciascun elemento $x \in \{2,5,6\} \subseteq X_8$, calcolare (in H) il corrispondente sottogruppo stabilizzatore St_x.

(c) Determinare per quali coppie di elementi (x,y) con $x,y \in \{2,5,6\}$ si abbia che St_x è coniugato a St_y in H, cioè esista un $h \in H$ tale che $St_x = h\, St_y\, h^{-1}$.

4 — Sia G un gruppo di ordine 56. Dimostrare che esiste in G sottogruppo normale non banale.

5 — Sia G un gruppo. In ciascuno dei due casi seguenti

(a) G ha ordine 40 — *(b)* G ha ordine 28

si determini se sia possibile scomporre G come prodotto semidiretto di due suoi sottogruppi non banali, cioè sia $G \cong H \ltimes N$ con H e N sottogruppi non banali di G, con N normale.

In caso affermativo, si specifichi l'ordine di ciascuno di tali sottogruppi, precisando quale sia l'ordine del sottogruppo normale.

Infine, si specifichino gli eventuali casi nei quali tale prodotto semidiretto risulti essere un prodotto *diretto*, cioè sia $G \cong H \times N$.

6 — Determinare quanti gruppi abeliani esistono, a meno di isomorfismo, di ordine 1200 e di ordine 405. Inoltre, si determini esplicitamente uno di tali gruppi per ciascuna classe di isomorfismo.

7 — Si consideri il sottoinsieme $\mathbb{Z}_{\{7\}}$ dell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali così definito:

$$\mathbb{Z}_{\{7\}} := \left\{ 7^e a \,\middle|\, e \in \mathbb{Z}\,,\, a \in (\mathbb{Z} \setminus 7\,\mathbb{Z}) \right\} = \left\{ 7^{-n} z \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\,,\, z \in \mathbb{Z} \right\}$$

(a) Dimostrare che $\mathbb{Z}_{\{7\}}$ è un dominio euclideo rispetto alla valutazione

$$v_{\{7\}} : \mathbb{Z}_{\{7\}} \longrightarrow \mathbb{N}\,, \qquad 7^e a \mapsto v_{\{7\}}(7^e a) := |a|$$

(b) Calcolare il gruppo $U(\mathbb{Z}_{\{7\}})$ degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{\{7\}}$.

8 — Dato un dominio a fattorizzazione unica R, sia $Q(R)$ il suo campo dei quozienti, e sia $p \in R$ un elemento irriducibile — o, in altre parole, primo — di R. Si consideri il sottoinsieme $R_{(p)}$ di $Q(R)$ così definito:

$$R_{(p)} := \left\{ q \in Q(R) \,\middle|\, q = n/d\,,\ n, d \in R\,,\ d \neq 0\,,\ M.C.D.(n,d) = 1\,,\ d \notin p\,R \right\}$$

In altre parole, $R_{(p)}$ è l'insieme delle "frazioni" in $Q(R)$ il cui denominatore *non* sia multiplo di (o divisibile per) l'elemento p.

(a) Dimostrare che $R_{(p)}$ è un sottoanello di $Q(R)$.

(b) Dimostrare che $R_{(p)}$ è un dominio euclideo rispetto alla valutazione

$$v_p : R_p \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}\,, \qquad n/d \mapsto v_p(n/d) := k \iff n \in (p^k R \setminus p^{k+1} R)$$

(c) Calcolare il gruppo $U(R_p)$ degli elementi invertibili di R_p.

9 — Nell'anello $\mathbb{Z}[i]$ degli interi di Gauss, si considerino i due ideali principali $I := (15 - 5\,i)$ e $J := (6 - 12\,i)$ generati rispettivamente dagli elementi $15 - 5\,i$ e $6 - 12\,i$.

(a) Calcolare un generatore dell'ideale $K := I \bigcap J$.

(b) Determinare tutti gli ideali dell'anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/K$, precisando quali di essi siano primi e quali siano massimali.

(c) Per ciascuno dei due elementi $\overline{6 - 3\,i}$ e $\overline{1 + 5\,i}$ nell'anello unitario $\mathbb{Z}[i]/K$, si determini se ne esista o meno l'inverso. In caso negativo, si spieghi perché tale inverso non esiste; in caso affermativo, si calcoli tale inverso.

10 — Nell'anello $\mathbb{Z}[i]$ degli interi di Gauss, si considerino i due elementi 30492 e 43560. Per ciascuno di essi, si determini se sia esprimibile come somma di due quadrati (in $\mathbb{Z}$); in caso affermativo, si scriva una tale espressione dell'elemento come somma di due quadrati.

11 — Si consideri il sottoinsieme $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-11}\,\big]$ dell'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi così definito:

$$\mathbb{Z}\big[\sqrt{-11}\,\big] \ := \ \Big\{ \zeta \in \mathbb{C} \ \Big| \ \exists\, a, b \in \mathbb{Z} : \zeta = a + b\sqrt{-11} = a + i\, b\sqrt{11} \ \Big\}$$

(a) Dimostrare che $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-11}\,\big]$ è un sottoanello unitario di $\mathbb{C}$.

(b) Determinare se $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-11}\,\big]$ *sia* — oppure *non sia* — un dominio euclideo, o un dominio a ideali principali, o un dominio a fattorizzazione unica.

12 — Si consideri l'estensione di campi $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}\big(\alpha\big)$, dove $\alpha := 7 - 5\sqrt[3]{2}$.

(a) Dimostrare che α è algebrico su $\mathbb{Q}$.

(b) Calcolare il grado e il polinomio minimo (su $\mathbb{Q}$) di α.

(c) Determinare esplicitamente una base di $\mathbb{Q}(\alpha)$ su $\mathbb{Q}$.

(d) Determinare se $\mathbb{Q}(\alpha)$ contenga, oppure no, ciascuno dei seguenti numeri:

$$\beta := 3/2 + \sqrt[4]{2} \ , \qquad \gamma := -1 + \sqrt{2} \ .$$

13 — Sia $\mathbb{K}$ un campo, e sia $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}(\alpha)$ una estensione algebrica semplice di grado n.

(a) Dimostrare che, se n è primo, allora $\mathbb{K}\big(\alpha^e\big) = \mathbb{K}(\alpha)$ per ogni $e \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

(b) Dimostrare, fornendo un esempio esplicito, che se n non è primo, allora può esistere un $\overline{e} \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tale che $\mathbb{K}\big(\alpha^{\overline{e}}\big) \subsetneqq \mathbb{K}(\alpha)$.

14 — *(a)* Costruire un campo $\mathbb{F}_8$ con 8 elementi.

(b) Determinare un generatore ω del gruppo moltiplicativo $\big(\mathbb{F}_8^{\,*}\,;\,\cdot\,\big)$, dove $\mathbb{F}_8^{\,*} := \mathbb{F}_8 \setminus \{0\}$ e $\mathbb{F}_8$ è costruito come in *(a)*. In particolare, verificare esplicitamente che tale ω sia un generatore.

15 — Si consideri l'estensione di campi $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}\big(\sqrt{3}, \sqrt{5}\,\big)$.

(a) Determinare un elemento primitivo dell'estensione, e il suo polinomio minimo su $\mathbb{Q}$.

(b) Calcolare il gruppo di Galois $G\Big(\mathbb{Q}\big(\sqrt{3}, \sqrt{5}\,\big) \Big/ \mathbb{Q}\Big)$ dell'estensione.