TEST DI VERIFICA DI ALGEBRA 2

13 Novembre 2007 — generalità su gruppi e anelli

. . . .

N.B.: il simbolo contrassegna gli esercizi un po' più complessi.

1 — Per ogni insieme X non vuoto, definiamo *supporto* di una qualsiasi permutazione $\sigma \in \mathcal{S}(X)$ il sottoinsieme $\mathit{supp}\,(\sigma) := \big\{\, x \in X \,\big|\, \sigma(x) \neq x \,\big\} \; \big(\subseteq X\big)$. Definiamo poi

$$\mathcal{S}_0(X) \;:=\; \big\{\, \sigma \in \mathcal{S}(X) \,\big|\, \mathit{supp}\,(\sigma) \text{ è sottoinsieme finito} \,\big\} \quad .$$

Si dimostri che $\mathcal{S}_0(X)$ è un sottogruppo normale del gruppo $\mathcal{S}(X)$.

2 — Sia A un anello, sia X un insieme, e sia A^X l'anello delle applicazioni da X in A . Per ogni $f \in A^X$ definiamo il sottoinsieme $\mathit{supp}\,(f) := \big\{\, x \in X \,\big|\, f(x) \neq 0_A \,\big\} \; \big(\subseteq X\big)$, detto *supporto* di f . Definiamo poi

$$A_0^X \;:=\; \big\{\, f \in A^X \,\big|\, \mathit{supp}\,(f) \text{ è sottoinsieme finito} \,\big\} \quad .$$

Si dimostri che A_0^X è un ideale (bilatero) dell'anello A^X .

3 — Dimostrare che gli anelli $\mathbb{Z}_{21} \big/ \big(\, [7]_{21} \big)$ e $\mathbb{Z}_7$ sono isomorfi.

4 — Dimostrare che gli anelli $\mathbb{Z}_3$ e $\mathbb{Z}_{12}[x] \big/ \big(\, [7]_{12}\, x \,-\, [5]_{12} \,,\, [3]_{12} \big)$ sono isomorfi.

5 — Determinare tutti gli ideali degli anelli $\mathbb{Z}_{63}$ e $\mathbb{Q}[x] \big/ \big(\, 3\,x^2 + 13\,x - 10 \,\big)$, precisando quali tra questi ideali siano primi e quali massimali.

6 — Dimostrare che nell'anello $\mathbb{Z}[x]$ l'ideale $I := \big(\, x^2 - x + 3 \,,\; x + 2 \,\big)$ non è primo.

7 — Applicando la tecnica esposta nella dimostrazione del Teorema di Cayley, si costruisca un morfismo iniettivo del gruppo $\big(\, \mathbb{Z}_6 \,;\, + \,\big)$ nel gruppo simmetrico $\big(\, \mathcal{S}_6 \,;\, \circ \,\big)$.

8 — Sia G un gruppo, e sia $\psi \colon G \longrightarrow G$ un endomorfismo di G tale che $\psi^2 = \psi$. Dimostrare che $G \cong Im(\psi) \ltimes Ker(\psi)$, cioè G è (isomorfo a) il prodotto semidiretto dei suoi sottogruppi $Im(\psi)$ e $Ker(\psi)$.

9 — Dimostrare che il gruppo $\big(\mathbb{C}^* \,;\, \cdot\,\big)$ è (isomorfo a) il prodotto diretto dei suoi sottogruppi $\mathbb{R}_+$ e $S^1 := \big\{\, z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = 1 \,\big\}$.

10 — Nel gruppo simmetrico su 7 elementi $\mathcal{S}_7$, si consideri la permutazione

$$\sigma \,:=\, (4,5,6) \circ (5,6,7) \circ (6,7,1) \circ (1,2,3) \circ (2,3,4) \circ (3,4,5)$$

(a) Scrivere σ come prodotto di cicli disgiunti, e come prodotto di trasposizioni.
(b) Determinare la permutazione inversa σ^{-1}.
(c) Determinare la classe coniugata di σ.

11 — Indicando con $\mathcal{S}_n$ il gruppo simmetrico su n elementi, si dimostri che

$$\forall\ \sigma \in \mathcal{S}_n \,,\ \ \exists\ \tau \in \mathcal{S}_n :\ \tau\,\sigma\,\tau^{-1} = \sigma^{-1}$$

12 — Sia G un gruppo, e per ogni $x \in G$ indichiamo con $[x]_\kappa$ la classe coniugata dell'elemento x. Sia poi

$$H \,:=\, \big\{\, h \in G \,\big|\, \big|[h]_\kappa\big| \in \mathbb{N} \,\big\}$$

il sottoinsieme di tutti gli elementi di G la cui classe coniugata sia finita.

Dimostrare che H è sottogruppo normale di G.

13 — Sia V_4 il gruppo di Klein, cioè l'insieme $\big\{\, e\,, i\,, j\,, k \big\}$ con tabella moltiplicativa

$$i\,j = k = j\,i\,, \qquad j\,k = i = k\,j\,, \qquad k\,i = j = i\,k$$
$$i^2 = j^2 = k^2 = e^2 = e\,, \quad e\,i = i = i\,e\,, \quad e\,j = j = j\,e\,, \quad e\,k = k = k\,e$$

Si dimostri che il gruppo $Aut_{\mathcal{G}}(V_4)$ degli automorfismi del gruppo V_4 è isomorfo al gruppo simmetrico $\mathcal{S}\big(\{i\,,j\,,k\}\big)$, dando un isomorfismo esplicito $Aut_{\mathcal{G}}(V_4) \xrightarrow{\cong} \mathcal{S}\big(\{i\,,j\,,k\}\big)$.

14 — Calcolare il gruppo $Aut_{\mathcal{G}}\big(\mathbb{Z}_8\big)$ degli automorfismi del gruppo $\big(\,\mathbb{Z}_8\,;\,+\,\big)$, descrivendolo come insieme (di applicazioni) e precisandone la tabella moltiplicativa.