ESERCIZI DI ALGEBRA

GRUPPI, ANELLI, G–SPAZI

N.B.: il simbolo contrassegna gli esercizi (relativamente) più complessi.

— $*$ —

1 — Sia G un gruppo finito, e sia $\phi \in Aut(G)$ tale che $\phi(y) = y \iff y = 1_G$. Sia poi $f_\phi : G \longrightarrow G$ la funzione data da $f_\phi(x) = x^{-1}\,\phi(x)$ $\big(\forall\, x \in G\big)$. Dimostrare che:

(a) f_ϕ è biiettiva;

(b) se $\phi^2 = id_G$, allora $\phi(g) = g^{-1}$ per ogni $g \in G$;

(c) se $\phi^2 = id_G$, allora G è abeliano.

2 — Dimostrare che l'anello $\mathbb{Z}[x,y,z]\Big/\big(x^2 + y\,z\,,\,11\,,\,x^2 - 10\big)$ è isomorfo all'anello dei polinomi di Laurent $\big(\mathbb{Z}_{11}[\,i\,]\big)\big[\,t,t^{-1}\big]$ — in una variabile t — a coefficienti in $\mathbb{Z}_{11}[\,i\,]$.

3 — Sia G un gruppo di ordine dispari. Dimostrare che il prodotto, in un ordine qualsiasi, di tutti gli elementi di G appartiene al sottogruppo derivato G' di G.

4 — Sia A un anello, e siano I e J ideali sinistri di A . Dimostrare che il sottoinsieme $\big(\,I : J\,\big) := \big\{\,a \in A \,\big|\, a\,J \subseteq I\,\big\}$ è un ideale bilatero di A .

5 — Sia $\mathbb{Z}_3[\,i\,] := \mathbb{Z}_3[x]\Big/\big(x^2 + 1\big)$, dove i indica la classe di x in questo anello quoziente.

(a) Determinare se $\mathbb{Z}_3[\,i\,]$ sia un dominio di integrità.

(b) Determinare se $\mathbb{Z}_3[\,i\,]$ sia un campo.

(c) Determinare la cardinalità di $\mathbb{Z}_3[\,i\,]$.

(d) Dimostrare $\mathbb{Z}_3[\,i\,]$ contiene una copia isomorfa di $\mathbb{Z}_3$, per cui ogni elemento di $\mathbb{Z}_3[\,i\,]$ si può scrivere in uno ed un sol modo nella forma $a + i\,b$ con $a, b \in \mathbb{Z}_3$, in modo tale che somma e prodotto siano espressi dalle formule

$$(\,a + i\,b\,) + \big(a' + i\,b'\big) = \big(a + a'\big) + i\big(\,b + b'\big)\ ,\quad (a + i\,b)\cdot\big(a' + i\,b'\big) = \big(a\,a' - b\,b'\big) + i\big(a\,b' + b\,a'\big)$$

(e) Calcolare il gruppo $U\big(\,\mathbb{Z}_3[\,i\,]\,\big)$ delle unità dell'anello $\mathbb{Z}_3[\,i\,]$.

(f) Detta $\phi : \mathbb{Z}_3[\,i\,] \longrightarrow \mathbb{Z}_3[\,i\,]$ la funzione data da $\phi\big(\,a + \,i\,b\,\big) := a^3 + \,i\,b^3$ per ogni $\big(\,a + \,i\,b\,\big) \in \mathbb{Z}_3[\,i\,]$, verificare che ϕ è un automorfismo dell'anello $\mathbb{Z}_3[\,i\,]$.

6 — Sia G un gruppo di ordine 60 che sia *semplice*, cioè privo di sottogruppi normali non banali. Dimostrare che:

(a) il numero dei 5–Sylow in G è 6 ;

(b) detto H_5 un qualsiasi 5–Sylow in G, il suo normalizzante $N_G\big(H_5\big)$ ha ordine 10 ;

(c) ogni gruppo K di ordine 20 ha esattamente uno ed un solo 5–Sylow;

(d) non esiste in G nessun sottogruppo di ordine 20 .

7 — Sia G un gruppo di ordine 140 . Dimostrare che:

(a) esiste in G uno ed un solo sottogruppo caratteristico K_{35} di ordine 35 ;

(b) G è risolubile; in particolare, si presenti esplicitamente una specifica catena discendente di sottogruppi di G, ciascuno normale nel precedente, in modo che i rispettivi quozienti siano tutti abeliani;

(c) G si fattorizza come prodotto semidiretto (interno) $G = H \ltimes N$ di un sottogruppo H ed un sottogruppo normale N entrambi non banali.

8 — Determinare la struttura ciclica del gruppo $U\big(\mathbb{Z}_{38}\big)$ secondo i due teoremi di classificazione dei gruppi abeliani finiti.

9 — Determinare il numero di classi di isomorfismo dei gruppi abeliani di ordine 36000 . Inoltre, per ciascuna classe di isomorfismo si esibisca esplicitamente un rappresentante della classe, presentato come prodotto diretto di gruppi ciclici come prescritto dal *1*^{0} *Teorema di Classificazione* e dal 2^0 *Teorema di Classificazione* dei gruppi abeliani finiti.

10 — Determinare il numero di anagrammi della parola “TATTARATTAAA”.