ESERCIZI DI ALGEBRA

GRUPPI E ANELLI (3)

N.B.: il simbolo contrassegna gli esercizi (relativamente) più complessi.

— $*$ —

1 — Dato un anello A e il corrispondente (per $n \in \mathbb{N}_+$ fissato) anello di matrici quadrate $Mat_n(A)$, consideriamo — per ogni $k \in \{0, \dots, n\}$ — i sottoinsiemi di $Mat_n(A)$

$$\mathrm{u}^+_{n;k}(A) := \left\{ M = \big(m_{i,j}\big)_{i=1,\dots,n;}^{j=1,\dots,n;} \in Mat_n(A) \,\middle|\, m_{i,j} = 0 \;\; \forall\, j < i+k \right\}$$

$$\mathrm{u}^-_{n;k}(A) := \left\{ M = \big(m_{i,j}\big)_{i=1,\dots,n;}^{j=1,\dots,n;} \in Mat_n(A) \,\middle|\, m_{i,j} = 0 \;\; \forall\, i > j+k \right\}$$

$$\mathrm{u}^{+|1}_{n;k}(A) := A\,I_n + \mathrm{u}^+_{n;k}(A) = \left\{ a\,I_n + M \,\middle|\, a \in A\,,\; M \in \mathrm{u}^+_{n;k}(A) \right\}$$

$$\mathrm{u}^{-|1}_{n;k}(A) := A\,I_n + \mathrm{u}^-_{n;k}(A) = \left\{ a\,I_n + M \,\middle|\, a \in A\,,\; M \in \mathrm{u}^-_{n;k}(A) \right\}$$

$$\mathrm{d}_n(A) := \left\{ M = \big(m_{i,j}\big)_i^j \in Mat_n(A) \,\middle|\, m_{i,j} = 0 \;\; \forall\, i \neq j \right\} = \left\{ \textit{matrici diagonali} \right\}$$

e poniamo $\mathrm{t}^\pm_n(A) := \mathrm{u}^\pm_{n;0}(A)$. Dimostrare che (per ogni k):

(a) $\quad \mathrm{u}^\pm_{n;k'}(A) \subseteq \mathrm{u}^\pm_{n;k}(A) \subseteq \mathrm{u}^\pm_n(A) \quad$ per ogni $k' \geq k$;

(b) $\quad \mathrm{u}^\pm_{n;k}(A)$ è ideale (bilatero) di $\mathrm{t}^\pm_n(A)$, ma *non* di $Mat_n(A)$;

(c) se $k > 0$, l'anello quoziente $\mathrm{u}^\pm_{n;k}(A) \big/ \mathrm{u}^\pm_{n;k+1}(A)$ è isomorfo all'anello $\big(A^{n-k}\,; \oplus\,, \odot\big)$ in cui la somma $\oplus$ è la normale somma del prodotto diretto di $(n-k)$ copie del gruppo additivo $(A\,;+)$ e $\odot$ è il prodotto banale (cioè il prodotto di due fattori è sempre zero);

(d) per $k = 0$ esistono isomorfismi di anelli $\mathrm{t}^\pm_n(A) \big/ \mathrm{u}^\pm_{n;1}(A) \cong \mathrm{d}_n(A) \cong \big(A^n\,; +\,, \cdot\big)$ in cui l'ultimo anello ha la struttura di anello *prodotto diretto* (di A con sé stesso n volte).

(e) $\quad \mathrm{u}^{\pm|1}_{n;k}(A)$ è sottoanello *unitario* di $\mathrm{t}^\pm_n(A)$, cioè è un sottoanello che contiene anche l'unità dell'anello $\mathrm{t}^\pm_n(A)$.

2 — Dato un anello unitario A e un $n \in \mathbb{N}_+$, consideriamo i gruppi $GL_n(A) := U\big(Mat_n(A)\big)$, $T^\pm_n(A) := U\big(\mathrm{t}^\pm_n(A)\big)$, $U^\pm_{n;k}(A) := U\big(\mathrm{u}^{\pm|1}_{n;k}(A)\big)$, $D_n(A) := U\big(\mathrm{d}_n(A)\big)$ degli elementi invertibili rispettivamente negli anelli unitari $Mat_n(A)$, $\mathrm{t}^\pm_n(A)$, $\mathrm{u}^{\pm|1}_{n;k}(A)$ e $\mathrm{d}_n(A)$ — con notazione come nell'esercizio 1 qui sopra. Dimostrare che:

(a) $\quad U^\pm_{n;k'}(A) \subseteq U^\pm_{n;k}(A) \subseteq T^\pm_n(A) \quad$ per ogni $k' \geq k$;

(b) $\quad U^\pm_{n;k}(A)$ è sottogruppo normale di $T^\pm_n(A)$, ma *non* di $GL_n(A)$.

(c) il gruppo quoziente $U^\pm_{n;k}(A) \big/ U^\pm_{n;k+1}(A)$ è isomorfo al gruppo $\big(A^{n-k}\,; \oplus\big)$, prodotto diretto di $(n-k)$ copie del gruppo additivo $(A\,;+)$;

(d) $T_n^{\pm}(A)$, $U_{n;k}^{\pm}(A)$ e $D_n(A)$ sono descritti esplicitamente da

$$T_n^{\pm}(A) := \Big\{ M = \big(m_{i,j}\big)_i^j \in \mathrm{t}_n^{\pm}(A) \,\Big|\, m_{\ell,\ell} \in U(A)\,,\ \forall\, \ell = 1, \dots, n \Big\}$$
$$U_{n;k}^{\pm}(A) := \Big\{ M = \big(m_{i,j}\big)_i^j \in \mathrm{u}_{n;k}^{\pm|1}(A) \,\Big|\, m_{\ell,\ell} \in U(A)\,,\ \forall\, \ell = 1, \dots, n \Big\}$$
$$D_n(A) := \Big\{ M = \big(m_{i,j}\big)_i^j \in \mathrm{d}_n(A) \,\Big|\, m_{\ell,\ell} \in U(A)\,,\ \forall\, \ell = 1, \dots, n \Big\}$$

(e) esistono isomorfismi di gruppi $T_n^{\pm}(A) \big/ U_{n;1}^{\pm}(A) \cong D_n(A) \cong \big(U(A)^n\,;+\,,\cdot\big)$, dove l'ultimo gruppo non è altro che il *prodotto diretto* di $U(A)$ con sé stesso n volte.

3 — Dato un campo $\mathbb{k}$ e uno spazio vettoriale V su $\mathbb{k}$, consideriamo l'insieme $End_{\mathcal{V}}(V)$ "endomorfismi di V come spazio vettoriale" e l'insieme $Aut_{\mathcal{V}}(V)$ "automorfismi di V come spazio vettoriale", cioè rispettivamente

$$End_{\mathcal{V}}(V) := \big\{ \phi \in V^V \,\big|\, \phi(c_1\, v_1 + c_2\, v_2) = c_1\, \phi(v_1) + c_2\, \phi(v_2)\,,\ \forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{k}\,,\ v_1, v_2 \in V \big\}$$
$$Aut_{\mathcal{V}}(V) := \big\{ \phi \in \mathcal{S}(V) \,\big|\, \phi(c_1\, v_1 + c_2\, v_2) = c_1\, \phi(v_1) + c_2\, \phi(v_2)\,,\ \forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{k}\,,\ v_1, v_2 \in V \big\}$$

Dimostrare che:

(a) $End_{\mathcal{V}}(V)$ è sottoanello unitario (cioè contenente anche l'unità id_V) dell'anello unitario $End_{\mathcal{G}}(V;+)$ degli endomorfismi del gruppo abeliano $(V;+)$;

(b) $Aut_{\mathcal{V}}(V)$ è sottogruppo del gruppo $\mathcal{S}(V)$ delle permutazioni di V in sé stesso;

(c) se V ha dimensione finita, indicata con n, esistono isomorfismi

$Aut_{\mathcal{V}}(V) \cong GL_n(\mathbb{k})$ (come gruppi), $\quad End_{\mathcal{V}}(V) \cong Mat_n(\mathbb{k})$ (come anelli).

4 — Dato un gruppo G, sia $H \leqslant Z(G)$ un sottogruppo del centro $Z(G)$ di G. Dimostrare che:

(a) $H \trianglelefteq G$, cioè H è sottogruppo *normale* di G;

(b) se il gruppo quoziente $G\big/H$ è ciclico, allora G è abeliano.

5 — Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $\mathbb{Z}_n$ l'anello delle classi resto modulo n, e sia $End_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}_n)$ l'insieme degli endomorfismi di anello di $\mathbb{Z}_n$, che è un gruppoide (associativo unitario) per l'operazione di composizione. Analogamente, sia $End_{\mathcal{A}}(\mathbb{Q})$ l'insieme degli endomorfismi di anello del campo $\mathbb{Q}$ dei razionali, anch'esso un gruppoide (associativo unitario) per l'operazione di composizione. Sia $Aut_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}_n)$ il *gruppo* degli automorfismi di anello di $\mathbb{Z}_n$, e analogamente $Aut_{\mathcal{A}}(\mathbb{Q})$ il *gruppo* degli automorfismi di anello di $\mathbb{Q}$. Dimostrare che:

(a) $End_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}_n)$ è isomorfo al gruppoide $\Big(\big\{\, \bar{c} \in \mathbb{Z}_n \,\big|\, \bar{c}^{\,2} = \bar{c} \,\big\}\,;\cdot\Big)$ — che è sottogruppoide di $\big(\mathbb{Z}_n\,;\cdot\big)$; in particolare, se n è primo allora $End_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}_n) = \big\{\, 0_{\mathbb{Q}}\,,\, id_{\mathbb{Z}_n} \big\}$;

(b) $End_{\mathcal{A}}(\mathbb{Q}) = \big\{\, 0_{\mathbb{Q}}\,,\, id_{\mathbb{Q}} \big\}$.

(c) $Aut_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}_n) = \big\{\, id_{\mathbb{Z}_n} \big\}$ e $Aut_{\mathcal{A}}(\mathbb{Q}) = \big\{\, id_{\mathbb{Q}} \big\}$, cioè tali gruppi sono banali.

6 — Sia A un anello unitario, e siano $A[[x]]$ e $A((x))$ rispettivamente l'anello delle serie (formali) e l'anello delle serie (formali) di Laurent in x a coefficienti in A. Dimostrare che il gruppo degli elementi invertibili in ognuno di questi anelli è dato rispettivamente da

(a) $$U\big(A[[x]]\big) \;=\; \Big\{ \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \in A[[x]] \;\Big|\; a_0 \in U(A) \Big\}$$

(b) $$U\big(A((x))\big) \;=\; \Big\{ \textstyle\sum_{n=z}^{+\infty} a_n\, x^n \in A((x)) \;\Big|\; a_z \in U(A) \Big\}$$

7 — Sia A un anello unitario, presi $A[[x]]$ e $A((x))$ come nell'esercizio 6 qui sopra siano

$$\varGamma_{A[[x]]} \,:=\, 1 + x\,A[[x]] \,=\, \big\{\, 1 + x\,f(x) \;\big|\; f(x) \in A[[x]] \,\big\} \quad , \qquad x^{\mathbb{Z}} \,:=\, \big\{\, x^z \;\big|\; z \in \mathbb{Z} \,\big\}$$

Dimostrare che si hanno le seguenti relazioni tra gruppi (moltiplicativi):

(a) $$\varGamma_{A[[x]]} \leqslant U\big(A[[x]]\big) \leqslant U\big(A((x))\big) \quad , \qquad x^{\mathbb{Z}} \leqslant Z\Big(U\big(A((x))\big)\Big) \leqslant U\big(A((x))\big)$$

e quindi in particolare $x^{\mathbb{Z}} \trianglelefteq U\big(A((x))\big)$;

(b) $$U\big(A[[x]]\big) \;\cong\; \varGamma_{A[[x]]} \rtimes_{\varphi} U(A) \qquad \text{(prodotto semidiretto \textit{interno} di gruppi)}$$

per un opportuno morfismo di gruppi $\varphi : U(A) \longrightarrow Aut\big(\varGamma_{A[[x]]}\big)$;

(c) $$U\big(A((x))\big) \;\cong\; U\big(A[[x]]\big) \times x^{\mathbb{Z}} \qquad \text{(prodotto diretto \textit{interno} di gruppi).}$$

8 — Sia A un anello unitario, e siano $A[x]$ e $A\big[x, x^{-1}\big]$ rispettivamente l'anello dei polinomi e l'anello dei polinomi di Laurent in x a coefficienti in A. Dimostrare che il gruppo degli elementi invertibili in ciascuno di questi anelli è descritto come segue:

(a) $$U\big(A\big[x, x^{-1}\big]\big) \;=\; U\big(A[x]\big)\, x^{\mathbb{Z}} \;=\; \Big\{ p(x)\, x^z \;\Big|\; p(x) \in U\big(A[x]\big)\,,\; z \in \mathbb{Z} \Big\}$$

ed esistono isomorfismi di gruppi $U\big(A\big[x, x^{-1}\big]\big) \;\cong\; U\big(A[x]\big) \times x^{\mathbb{Z}} \;\cong\; x^{\mathbb{Z}} \times U\big(A[x]\big)$;

(b) se A è privo di divisori di zero, allora

$$U\big(A[x]\big) \;=\; \Big\{ \textstyle\sum_{n=0}^{N} a_n\, x^n \in A[x] \;\Big|\; a_0 \in U(A)\,,\; a_n = 0 \;\; \forall\, n > 0 \Big\}$$

(c) se A è commutativo e $\mathcal{N}(A)$ è il suo radicale nilpotente, allora

$$U\big(A[x]\big) \;=\; \Big\{ \textstyle\sum_{n=0}^{N} a_n\, x^n \in A[x] \;\Big|\; a_0 \in U(A)\,,\; a_n \in \mathcal{N}(A) \;\; \forall\, n > 0 \Big\}$$

(ricordando che $\mathcal{N}(A) := \big\{\, a \in A \,\big|\, a^s = 0 \;\forall\, s \gg 0 \,\big\}$, ed è un ideale — bilatero — di A).

9 — Sia A un anello. Consideriamo l'insieme delle matrici "triangolari superiori infinite" a coefficienti in A, cioè l'insieme

$$\mathrm{t}_\infty^+(A) \ := \ \Big\{ M = \big(m_{i,j}\big)_{i=1,2,\dots;}^{j=1,2,\dots;} \ \Big|\ m_{i,j} \in A \ \ \forall\, i,j \in \mathbb{N}_+ \,,\ m_{i,j} = 0 \ \ \forall\, i > j \Big\}$$

e l'analogo insieme delle matrici "triangolari inferiori infinite" a coefficienti in A, cioè

$$\mathrm{t}_\infty^-(A) \ := \ \Big\{ M = \big(m_{i,j}\big)_{i=1,2,\dots;}^{j=1,2,\dots;} \ \Big|\ m_{i,j} \in A \ \ \forall\, i,j \in \mathbb{N}_+ \,,\ m_{i,j} = 0 \ \ \forall\, i < j \Big\}$$

Dimostrare che:

(a) entrambi $\mathrm{t}_\infty^+(A)$ e $\mathrm{t}_\infty^-(A)$ sono anelli rispetto alle operazioni di somma "componente per componente" e di prodotto "righe per colonne" date dalle formule usuali;

(b) per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ esistono monomorfismi canonici di anelli $\phi_n^\pm : \mathrm{t}_n^\pm(A) \hookrightarrow \mathrm{t}_\infty^\pm(A)$;

(c) se A è unitario, allora gli anelli $\mathrm{t}_\infty^\pm(A)$ sono unitari, e i monomorfismi $\phi_n^\pm$ di cui al punto *(b)* qui sopra mandano l'unità dell'anello $\mathrm{t}_n^\pm(A)$ nell'unità dell'anello $\mathrm{t}_\infty^\pm(A)$.

10 — Sia A un anello. Con le notazioni dell'esercizio 9 qui sopra, consideriamo il sottoinsieme $\mathrm{t}_\infty^{\pm\,;\mathit{fin}}(A)$ di $\mathrm{t}_\infty^\pm(A)$ definito così:

$$\begin{aligned}
\mathrm{t}_\infty^{+\,;\mathit{fin}}(A) \ &:= \ \Big\{ M = \big(m_{i,j}\big)_{i=1,2,\dots;}^{j=1,2,\dots;} \in \mathrm{t}_\infty^+(A) \ \Big|\ m_{i,j} = 0 \ \ \forall\, j \gg 0 \Big\} \\
\mathrm{t}_\infty^{-\,;\mathit{fin}}(A) \ &:= \ \Big\{ M = \big(m_{i,j}\big)_{i=1,2,\dots;}^{j=1,2,\dots;} \in \mathrm{t}_\infty^-(A) \ \Big|\ m_{i,j} = 0 \ \ \forall\, i \gg 0 \Big\}
\end{aligned}$$

Dimostrare che $\mathrm{t}_\infty^{\pm\,;\mathit{fin}}(A)$ è sottoanello di $\mathrm{t}_\infty^\pm(A)$.

11 — Sia A un anello, e siano $A[x]$ e $A[[x]]$ i corrispondenti anelli di polinomi e di serie formali nella variabile x a coefficienti in A. Con le notazioni degli esercizi 9 e 10 qui sopra, consideriamo la funzione $\mu^+ : A[[x]] \longrightarrow \mathrm{t}_\infty^+(A)$ definita da

$$\mu^+\bigg(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n\bigg) \ := \ \big(m_{i,j}\big)_{i=1,2,\dots;}^{j=1,2,\dots;} \qquad \text{con} \qquad m_{i,j} \ := \ \begin{cases} 0 & \forall\ i > j \\ a_{j-i} & \forall\ i \leq j \end{cases}$$

cioè esplicitamente da

$$\mu^+\bigg(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n\bigg) \ := \ \begin{pmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & a_{n+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & a_{n+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & a_{n+1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & a_{n+1} & \cdots & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{pmatrix}$$

Dimostrare che:

(a) la funzione μ^+ è un monomorfismo di anelli;

(b) $\mu^+\big(A[x]\big) \subseteq \mathrm{t}_\infty^{+\,;\mathit{fin}}(A)$, cioè l'immagine — tramite il monomorfismo di anelli μ^+ — del sottoanello $A[x]$ di $A[[x]]$ è contenuta nel sottoanello $\mathrm{t}_\infty^{+\,;\mathit{fin}}(A)$ di $\mathrm{t}_\infty^{+}(A)$.

(c) esiste un'analoga funzione $\mu^- : A[[x]] \longrightarrow \mathrm{t}_\infty^{-}(A)$ — descriverla esplicitamente! — che ha analoghe proprietà — precisarle esplicitamente!

12 — Sia A un anello unitario. Con le notazioni dell'esercizio 9 qui sopra, consideriamo l'insieme delle matrici "triangolari superiori infinite *invertibili*" (a coefficienti in A) e l'insieme delle matrici "triangolari inferiori infinite *invertibili*" (a coefficienti in A), cioè i due gruppi $T_\infty^{\pm}(A) := U\big(\mathrm{t}_\infty^{\pm}(A)\big)$ degli elementi invertibili nei due anelli $\mathrm{t}_\infty^{\pm}(A)$.

Dimostrare che:

(a) per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ esistono monomorfismi canonici di gruppi $\Phi_n^+ : T_n^{\pm}(A) \hookrightarrow T_\infty^{\pm}(A)$;

(b) i gruppi $T_\infty^{\pm}(A)$ sono descritti esplicitamente da

$$T_\infty^{\pm}(A) \;\; := \;\; \Big\{\, M = \big(m_{i,j}\big)_{i=1,2,\dots;}^{j=1,2,\dots;} \in \mathrm{t}_\infty^{\pm}(A) \;\Big|\; m_{\ell,\ell} \in U(A) \;\; \forall\, \ell \in \mathbb{N}_+ \,\Big\}$$

13 — Sia A un anello unitario. Con le notazioni dell'esercizio 10 qui sopra, consideriamo il sottoinsieme $T_\infty^{\pm\,;\mathit{fin}}(A)$ di $T_\infty^{\pm}(A)$ dato da

$$T_\infty^{+\,;\mathit{fin}}(A) \;\; := \;\; \Big\{\, M = \big(m_{i,j}\big)_{i=1,2,\dots;}^{j=1,2,\dots;} \in T_\infty^{+}(A) \;\Big|\; m_{i,j} = 0 \;\; \forall\, j \gg 0 \,\Big\}$$

$$T_\infty^{-\,;\mathit{fin}}(A) \;\; := \;\; \Big\{\, M = \big(m_{i,j}\big)_{i=1,2,\dots;}^{j=1,2,\dots;} \in T_\infty^{-}(A) \;\Big|\; m_{i,j} = 0 \;\; \forall\, i \gg 0 \,\Big\}$$

Dimostrare che $T_\infty^{\pm\,;\mathit{fin}}(A)$ è sottogruppo di $T_\infty^{\pm}(A)$.

14 — Sia A un anello unitario. Sfruttando gli esercizi 11 e 12, dimostrare (di nuovo...) che il gruppo $U\big(A[[x]]\big)$ delle serie formali in x (a coefficienti in A) *invertibili* è dato da

$$U\big(A[[x]]\big) \;\; = \;\; \Big\{\, \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \in A[[x]] \;\Big|\; a_0 \in U(A) \,\Big\}$$