ESERCIZI DI ALGEBRA — GRUPPI E ANELLI (2)

N.B.: il simbolo contrassegna gli esercizi (relativamente) più complessi.

— $*$ —

1 — Dato un morfismo di anelli $\phi : R \longrightarrow A$, dimostrare che la funzione associata

$$M_n(\phi) \,:\, Mat_n(R) \longrightarrow Mat_n(A)\ , \quad \big(r_{i,j}\big) \mapsto M_n(\varphi)\Big(\big(r_{i,j}\big)\Big) := \big(\phi(r_{i,j})\big)$$

è a sua volta un morfismo di anelli. Inoltre:

(a) per $\phi = id_A$ si ha $M_n(id_A) = id_{\mathrm{Mat}_n(A)}$;

(b) se $\psi : A \longrightarrow T$ è un altro morfismo di anelli si ha $M_n(\psi \circ \phi) = M_n(\psi) \circ M_n(\phi)$.

2 — Dato un morfismo di anelli *unitari* $\phi : R \longrightarrow A$, dimostrare che la funzione associata

$$G_n(\phi) \,:\, GL_n(R) \longrightarrow GL_n(A)\ , \quad \big(r_{i,j}\big) \mapsto G_n(\varphi)\Big(\big(r_{i,j}\big)\Big) := \big(\phi(r_{i,j})\big)$$

è un morfismo di gruppi. Inoltre:

(a) per $\phi = id_A$ si ha $G_n(id_A) = id_{GL_n(A)}$;

(b) se $\psi : A \longrightarrow T$ è un analogo morfismo, si ha $G_n(\psi \circ \phi) = G_n(\psi) \circ G_n(\phi)$.

3 — Sia $(G\,;\,\cdot\,)$ un gruppo finito, e siano $g_1, \dots, g_k \in G$ con $k \geq |G|$. Dimostrare che esistono indici $p, \dots, q \in \{0, 1, \dots, k\}$ con $p < q$ tali che $g_{p+1}\, g_{p+2} \cdots g_{q-1}\, g_q \;=\; 1_G$.

4 — Dato un anello A, si consideri l'anello quoziente

$$R \;:=\; A[x,y]\Big/\big(\, x^2 + x\,y + x + 3\,,\, y - 1\,\big)$$

Determinare una descrizione "più semplice" dell'anello R.

5 — Siano Γ un gruppoide e A un anello. Dimostrare che

(a) l'insieme $Aut_{\mathcal{G}d}(\Gamma) \;:=\; \big\{\, \textit{automorfismi del gruppoide } \Gamma \,\big\}$ è un sottogruppo del gruppo $\big(\mathcal{S}(\Gamma)\,;\circ\big)$ delle permutazioni di Γ ;

(b) l'insieme $Aut_{\mathcal{A}}(A) := \big\{\, \textit{automorfismi dell'anello } A \,\big\}$ è un sottogruppo del gruppo $\big(\mathcal{S}(A)\,;\circ\big)$ delle permutazioni di A .

6 — Sia A un anello commutativo unitario. Per ogni ideale I in A, si definisca

$$r(I) \;:=\; \big\{\, a \in A \,\big|\, a^n \in I \,,\ \forall\, n \gg 0 \,\big\} \;=:\; \textit{radicale di } I\,.$$

Dimostrare che:

(a) $r\big(\{0_A\}\big) = \mathcal{N}(A) \;=:$ *nilradicale di* A;

(b) $I \subseteq r(I)\,,\quad r(I) \trianglelefteq A\;$;

(c) $r\big(r(I)\big) = r(I)\;$.

7 — Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $\vartheta_n : (\mathbb{Z}_n\,;+\,,\,\cdot\,) \hookrightarrow \big(End_{\mathcal{G}}(\mathbb{Z}_n\,;+\,)\,;\oplus\,,\circ\big)$ il monomorfismo di anelli dato dal *Teorema di Cayley* (per anelli) applicato all'anello $\mathbb{Z}_n$. Si verifichi che ϑ_n è in effetti un isomorfismo (*N.B.:* per $n = 0$ si ha $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}$).

Analogamente, detto $\vartheta : (\mathbb{Q}\,;+\,,\,\cdot\,) \hookrightarrow \big(End_{\mathcal{G}}(\mathbb{Q}\,;+\,)\,;\oplus\,,\circ\big)$ il monomorfismo di anelli dato dal *Teorema di Cayley* (per anelli) applicato all'anello $\mathbb{Q}$, si verifichi che in effetti ϑ è un isomorfismo.

8 — Sia G un gruppo e $H \leqslant G$, con $(G:H) \in \mathbb{N}_+$, cioè H è un sottogruppo di indice finito in G. Dimostrare che l'insieme $\big\{\, gHg^{-1} \,\big|\, g \in G \,\big\}$ dei coniugati di G è finito, e per la sua cardinalità vale la maggiorazione $\Big|\big\{\, gHg^{-1} \,\big|\, g \in G \,\big\}\Big| \;\leq\; (G:H)\;$.

9 — Sia G un gruppo, $H \leqslant G$ e $N_H^G := \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$. Dimostrare che N_H^G è sottogruppo normale di G, è contenuto in H, ed è il massimo (rispetto all'inclusione) tra tutti i sottogruppi normali di G contenuti in H.

10 *Teorema Cinese del Resto (per Gruppi)* — Sia G un gruppo e sia $\big\{H_i\big\}_{i \in I}$ una famiglia di sottogruppi di G. Dimostrare che:

(a) esistono immersioni "canoniche"

$$j_s \,:\, G\Big/\textstyle\bigcap_{i \in I} H_i \hookrightarrow \bigtimes_{i \in I} G\Big/H_i \quad,\qquad g\,\big(\bigcap_{i \in I} H_i\big) \;\mapsto\; \big(g\,H_i\big)_{i \in I}$$

$$j_d \,:\, \textstyle\bigcap_{i \in I} H_i\Big\backslash G \hookrightarrow \bigtimes_{i \in I} H_i\Big\backslash G \quad,\qquad \big(\bigcap_{i \in I} H_i\big)\,g \;\mapsto\; \big(H_i\,g\big)_{i \in I}$$

(cioè, le su descritte funzioni sono effettivamente ben definite...);

(b) se $H_i \trianglelefteq G$ per ogni $i \in I$, allora j_s e j_d coincidono e sono morfismi di gruppi.

11 — Sia G un gruppo e $H \leqslant G$, con $(G:H) \in \mathbb{N}_+$, cioè H è un sottogruppo di indice finito in G. Dimostrare che esiste un $N \trianglelefteq G$ tale che $N \subseteq H$ e $(G:N) \in \mathbb{N}_+$, e più precisamente tale che valga per $(G:N)$ la maggiorazione $(G:N) \leq (G:H)^{(G:H)}$.

12 *Teorema Cinese del Resto (per Anelli)* — Sia A un anello e sia $\{J_i\}_{i \in I}$ una famiglia di ideali di A. Dimostrare che esiste un monomorfismo "canonico" di anelli

$$j \,:\, A \Big/ \bigcap_{i \in I} J_i \longhookrightarrow \bigtimes_{i \in I} A \Big/ J_i \quad , \qquad a + \big(\bigcap_{i \in I} J_i \big) \mapsto \big(a + J_i \big)_{i \in I}$$

13 *Caratterizzazione dei prodotti semidiretti (di gruppi) in termini di morfismi:*

(a) Sia $G := K \underset{\varphi}{\rtimes} H$ un prodotto semidiretto dei gruppi K e H.

Dimostrare che allora esistono morfismi di gruppi $K \xrightarrow{\nu} G$, $G \xrightarrow{\pi} H$, $H \xrightarrow{\sigma} G$, per i quali si ha $Ker(\nu) = \{1_K\}$, $Im(\nu) = Ker(\pi)$, $\pi \circ \sigma = id_H$.

(b) Siano H, K, G tre gruppi e siano $K \xrightarrow{\nu} G$, $G \xrightarrow{\pi} H$, $H \xrightarrow{\sigma} G$ tre morfismi per i quali si abbia $Ker(\nu) = \{1_K\}$, $Im(\nu) = Ker(\pi)$, $\pi \circ \sigma = id_H$.

Dimostrare che allora G è isomorfo ad un prodotto semidiretto di K con H, precisamente si ha $G \cong K \underset{\varphi}{\rtimes} H$ per un opportuno morfismo $\varphi : H \longrightarrow Aut(K)$.

14 — Siano J, A, R tre anelli e siano $J \xrightarrow{\nu} R$, $R \xrightarrow{\pi} A$, $A \xrightarrow{\sigma} R$ tre morfismi per i quali si abbia $Ker(\nu) = \{0_J\}$, $Im(\nu) = Ker(\pi)$, $\pi \circ \sigma = id_A$.

Dimostrare che esistono $\widehat{J} \trianglelefteq R$ e $\widehat{A} \leqslant R$ (cioè un ideale J e un sottoanello A in R) tali che

(a) $\widehat{J} \cong J$, $\widehat{A} \cong A$ (come anelli);

(b) $\widehat{J} \cap \widehat{A} = \{0_R\}$, $\widehat{J} + \widehat{A} = R$.