ESERCIZI DI ALGEBRA — GRUPPI E ANELLI (1)

N.B.: il simbolo ☡ contrassegna gli esercizi (relativamente) più complessi.

— $*$ —

1 — Sia A un insieme non vuoto; l'insieme A^A di tutte le funzioni da A in sé è allora un gruppoide per l'operazione di composizione $\circ$. Sia $B \subseteq A$ un sottoinsieme non vuoto di A . Dimostrare che:

(a) l'insieme $A^A_{(B)} := \big\{ f \in A^A \,\big|\, f(B) \subseteq B \big\}$ è chiuso rispetto all'operazione $\circ$;

(b) la funzione $\varphi : \Big(A^A_{(B)} \, ; \circ \Big) \longrightarrow \big(B^B \, ; \circ \big)$ data da $f \mapsto \varphi(f) := f\big|_B$ è un epimorfismo.

2 — Sia A un insieme non vuoto; l'insieme $\mathcal{S}(A)$ di tutte le permutazioni di A è allora un gruppo per l'operazione di composizione $\circ$. Sia $B \subseteq A$ un sottoinsieme di A , a sua volta non vuoto. Dimostrare che:

(a) l'insieme $\mathcal{S}_B(A) := \big\{ \sigma \in \mathcal{S}(A) \,\big|\, \sigma(B) = B \big\}$ è un sottogruppo di $\mathcal{S}(A)$;

(b) la funzione $\psi : \mathcal{S}_B(A) \longrightarrow \mathcal{S}(B)$ data da $f \mapsto \psi(\sigma) := \sigma\big|_B$ è un epimorfismo (di gruppi);

(c) vale l'uguaglianza di sottogruppi $\mathcal{S}_B(A) = \mathcal{S}_{A \setminus B}(A)$;

(d) la funzione $\Phi : \mathcal{S}_B(A) \longrightarrow \mathcal{S}(B) \times \mathcal{S}(A \setminus B)$ data da $f \mapsto \psi(\sigma) := \big(\sigma\big|_B \, , \sigma\big|_{A \setminus B} \big)$ è un isomorfismo (di gruppi), avendo preso nel codominio la struttura di gruppo *prodotto diretto*.

3 — Sia $\varGamma$ un gruppo abeliano, e sia $End_{\mathcal{G}}(\varGamma)$ l'insieme di tutti gli endomorfismi di $\varGamma$, con la sua struttura di anello unitario canonica (in cui la somma è indotta dalla operazione in $\varGamma$ e il prodotto è la composizione). Sia Λ un sottogruppo di $\varGamma$.

Dimostrare che l'insieme $End^{\Lambda}_{\mathcal{G}}(\varGamma) := \big\{ \varphi \in End_{\mathcal{G}}(\varGamma) \,\big|\, \varphi(\Lambda) \subseteq \Lambda \big\}$ è un sottoanello di $End_{\mathcal{G}}(\varGamma)$, contenente l'identità.

4 — Siano $G \xrightarrow{\phi} H$ e $G \xrightarrow{\psi} H$ due morfismi da un gruppo G ad un gruppo H . Dimostrare che $D_{\phi|\psi} := \big\{ g \in G \,\big|\, \phi(g) = \psi(g) \big\}$ è un sottogruppo di G .

5 — Siano $A \xrightarrow{\phi} R$ e $A \xrightarrow{\psi} R$ due morfismi da un anello A ad un anello R . Dimostrare che $D_{\phi|\psi} := \big\{ a \in A \,\big|\, \phi(a) = \psi(a) \big\}$ è un sottoanello di A .

6 — Sia A un anello unitario, sia $n \in \mathbb{N}_+$, e sia $Mat_n(A)$ l'anello delle matrici $n \times n$ a coefficienti in A. Dimostrare che il centro dell'anello $Mat_n(A)$ è dato da

$$Z\big(Mat_n(A)\big) \;=\; \big\{\, diag(z,z,\dots,z) \,\big|\, z \in Z(A) \,\big\}$$

dove $diag(z,z,\dots,z) := \begin{pmatrix} z & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & z \end{pmatrix}$ indica la matrice scalare che ha sulla diagonale il coefficiente z (ripetuto n volte, in tutte le posizioni).

7 — Sia A un anello unitario, sia $n \in \mathbb{N}_+$, e sia $GL_n(A)$ il gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili a coefficienti in A. Dimostrare che il centro del gruppo $GL_n(A)$ è dato da

$$Z\big(GL_n(A)\big) \;=\; \big\{\, diag(z,z,\dots,z) \,\big|\, z \in Z(A) \cap U(A) \,\big\}$$

dove $diag(z,z,\dots,z)$ indica una matrice scalare — come nell'esercizio 6 — e $U(A)$ è il gruppo degli elementi invertibili in A.

8 — Sia G un gruppo e H un sottogruppo di G, con indice $\big(G:H\big) = 2$. Dimostrare che H è sottogruppo normale di G.

9 — Sia A un anello e sia R un sottoinsieme di A. Dato $n \in \mathbb{N}_+$, l'insieme $Mat_n(R)$ delle matrici $n \times n$ a coefficienti in R si identifica naturalmente ad un sottoinsieme dell'analogo insieme $Mat_n(A)$. Dimostrare che:

(a) se R è sottoanello di A, allora $Mat_n(R)$ è sottoanello di $Mat_n(A)$;

(b) se R è ideale sinistro di A, allora $Mat_n(R)$ è ideale sinistro di $Mat_n(A)$;

(c) se R è ideale destro di A, allora $Mat_n(R)$ è ideale destro di $Mat_n(A)$;

(d) se R è ideale (bilatero) di A, allora $Mat_n(R)$ è ideale (bilatero) di $Mat_n(A)$, e l'anello quoziente $Mat_n(A)\big/Mat_n(R)$ è isomorfo all'anello di matrici $Mat_n\big(A/R\big)$.

10 — Sia A un anello unitario e sia R un sottoanello di A, contenente l'unità di A. Dato $n \in \mathbb{N}_+$, l'insieme $GL_n(R)$ delle matrici $n \times n$ invertibili a coefficienti in R si identifica naturalmente ad un sottoinsieme dell'analogo insieme $GL_n(A)$. Dimostrare allora che $GL_n(R)$ è sottogruppo di $GL_n(A)$.

11 — Sia $\{G_i\}_{i\in I}$ una famiglia di gruppi, indicizzata da un insieme I. Il corrispondente prodotto cartesiano $\bigtimes_{i\in I} G_i$ è allora un gruppo — detto "prodotto diretto dei G_i" — per l'operazione data da $\big(g'_i\big)_{i\in I}\big(g''_i\big)_{i\in I} := \big(g'_i g''_i\big)_{i\in I}$. Per ogni $i \in I$ sia dato un sottoinsieme $H_i \subseteq G_i$; si definisca allora

$$\bigtimes_{i\in I} G_i^{\langle H\rangle} \;:=\; \Big\{ \big(g_i\big)_{i\in I} \in \bigtimes_{i\in I} G_i \;\Big|\; g_i \in H_i\,,\ \forall\, i \in I \Big\}\,.$$

Dimostrare che:

(a) se ogni H_i è sottogruppo di G_i $(\,i \in I\,)$, allora $\bigtimes_{i\in I} G_i^{\langle H\rangle}$ è sottogruppo di $\bigtimes_{i\in I} G_i$, ed è isomorfo al prodotto diretto $\bigtimes_{i\in I} H_i$ degli H_i $(\,i \in I\,)$ — come gruppi in sé stessi;

(b) se ogni H_i è sottogruppo normale di G_i $(\,i \in I\,)$, allora $\bigtimes_{i\in I} G_i^{\langle H\rangle}$ è sottogruppo normale di $\bigtimes_{i\in I} G_i$, e il corrispondente gruppo quoziente $\bigtimes_{i\in I} G_i \Big/ \bigtimes_{i\in I} G_i^{\langle H\rangle}$ è isomorfo al prodotto diretto $\bigtimes_{i\in I} G_i\big/H_i$ dei vari gruppi quoziente G_i/H_i $(\,i \in I\,)$;

(c) se ogni H_i è sottogruppo caratteristico di G_i $(\,i \in I\,)$, *in generale* $\bigtimes_{i\in I} G_i^{\langle H\rangle}$ *non è necessariamente* sottogruppo *caratteristico* di $\bigtimes_{i\in I} G_i$.

12 — Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ una famiglia di anelli, indicizzata da un insieme I. Il corrispondente prodotto cartesiano $\bigtimes_{i\in I} A_i$ è allora un anello — detto "prodotto diretto degli A_i" — per le due operazioni $\big(a'_i\big)_{i\in I} + \big(a''_i\big)_{i\in I} := \big(a'_i + a''_i\big)_{i\in I}$ e $\big(a'_i\big)_{i\in I}\big(a''_i\big)_{i\in I} := \big(a'_i a''_i\big)_{i\in I}$. Per ogni $i \in I$ sia dato un sottoinsieme $R_i \subseteq A_i$; si definisca allora

$$\bigtimes_{i\in I} A_i^{\langle R\rangle} \;:=\; \Big\{ \big(a_i\big)_{i\in I} \in \bigtimes_{i\in I} A_i \;\Big|\; a_i \in R_i\,,\ \forall\, i \in I \Big\}\,.$$

Dimostrare che:

(a) se ogni R_i è sottoanello di A_i $(\,i \in I\,)$, allora $\bigtimes_{i\in I} A_i^{\langle R\rangle}$ è sottoanello di $\bigtimes_{i\in I} A_i$, ed è isomorfo al prodotto diretto $\bigtimes_{i\in I} R_i$ degli R_i $(\,i \in I\,)$ — come anelli in sé stessi;

(b) se ogni R_i è ideale sinistro di G_i $(\,i \in I\,)$, allora $\bigtimes_{i\in I} A_i^{\langle R\rangle}$ è ideale sinistro di $\bigtimes_{i\in I} A_i$;

(c) se ogni R_i è ideale destro di G_i $(\,i \in I\,)$, allora $\bigtimes_{i\in I} A_i^{\langle R\rangle}$ è ideale destro di $\bigtimes_{i\in I} A_i$;

(d) se ogni R_i è ideale (bilatero) di G_i $(\,i \in I\,)$, allora anche $\bigtimes_{i\in I} A_i^{\langle R\rangle}$ a sua volta è ideale (bilatero) di $\bigtimes_{i\in I} A_i$, e il corrispondente anello quoziente $\bigtimes_{i\in I} A_i \Big/ \bigtimes_{i\in I} A_i^{\langle R\rangle}$ è isomorfo al prodotto diretto $\bigtimes_{i\in I} A_i\big/R_i$ dei vari anelli quoziente A_i/R_i $(\,i \in I\,)$.