ESERCIZI DI ALGEBRA
DOMINI UNITARI, FATTORIZZAZIONE (1)

N.B.: il simbolo contrassegna gli esercizi (relativamente) più complessi.

— ∗ —

1 — Dimostrare che ogni dominio finito D è un campo.

2 — Per ogni scelta di elementi primi $p_1, \dots, p_k$ in $\mathbb{Z}$, sia

$$\mathbb{Z}_{\{p_1,\dots,p_k\}} \;:=\; \left\{ p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k} z \;\middle|\; e_1 \in \mathbb{Z}, \dots, e_k \in \mathbb{Z},\, z \in \mathbb{Z} \right\} \qquad (\subseteq \mathbb{Q})$$

(a) Dimostrare che $\mathbb{Z}_{\{p_1,\dots,p_k\}}$ è un sottoanello di $\mathbb{Q}$.

(b) Dimostrare che $\mathbb{Z}_{\{p_1,\dots,p_k\}}$ è un dominio euclideo.

(c) Calcolare il gruppo degli invertibili $U\big(\mathbb{Z}_{\{p_1,\dots,p_k\}}\big)$.

(d) Se D è un dominio euclideo, trovare — se possibile — una opportuna generalizzazione, sotto ipotesi adeguate, dei precedenti risultati al caso di D al posto di $\mathbb{Z}$.

((*Suggerimento*: Sappiamo che $\mathbb{Z}$ è dominio euclideo per la valutazione $v(z) := |z|$, la quale è *moltiplicativa*. Tenuto conto che gli elementi della forma $p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$, essendo *invertibili* in $\mathbb{Z}_{\{p_1,\dots,p_k\}}$, devono avere valutazione *minima*, quale potrebbe essere la valutazione da prendere in $\mathbb{Z}_{\{p_1,\dots,p_k\}}$ perché sia un dominio euclideo?))

3 — Sia D un dominio a fattorizzazione unica e sia $Q(D)$ il suo campo dei quozienti. Sia $p \in D$ un primo di D, e sia

$$D_{(p)} \;:=\; \left\{ a/b \in Q(D) \;\middle|\; a, b \in D,\, b \neq 0,\, b \notin (p) \right\}$$

Dimostrare che:

(a) $D_{(p)}$ è un sottoanello di $Q(D)$;

(b) $D_{(p)}$ è un dominio euclideo;

(c) quando si opera una divisione con resto in $D_{(p)}$, o il quoziente è nullo oppure il resto è nullo;

(d) esiste in $D_{(p)}$ uno ed un solo ideale massimale, generato da p;

(e) gli ideali I di $D_{(p)}$ sono tutti e soli della forma $I = \big(p^n\big)$ con $n \in \mathbb{N}$.

(f) Infine, si calcoli il gruppo $U\big(D_{(p)}\big)$ degli invertibili di $D_{(p)}$.

4 — Sia D un dominio unitario e sia $p \in D$ un elemento primo in D tale che $\bigcap_{n=0}^{+\infty} \big(p^n\big) = \{0\}$. Detto $Q(D)$ il campo dei quozienti di D, definiamo

$$D_{(p)} := \Big\{ a\big/b \in Q(D) \;\Big|\; a,b \in D,\, b \neq 0,\, b \notin (p) \Big\}$$

Dimostrare che:

(a) $D_{(p)}$ è un sottoanello di $Q(D)$;

(b) $D_{(p)}$ è un dominio euclideo;

(c) quando si opera una divisione con resto in $D_{(p)}$, o il quoziente è nullo oppure il resto è nullo;

(d) esiste in $D_{(p)}$ uno ed un solo ideale massimale, generato da p ;

(e) gli ideali I di $D_{(p)}$ sono tutti e soli della forma $I = \big(p^n\big)$ con $n \in \mathbb{N}$.

(f) Infine, si calcoli il gruppo $U\big(D_{(p)}\big)$ degli invertibili di $D_{(p)}$.

5 — Sia D un dominio a fattorizzazione unica e sia $Q(D)$ il suo campo dei quozienti. Fissiamo una famiglia $\Pi := \big\{q_i\big\}_{i \in \mathcal{I}}$ di irriducibili in D tale che per ogni irriducibile $q \in D$ esista uno ed un solo indice $i \in \mathcal{I}$ tale che $q \sim q_i$. Sia poi

$$\mathbb{Z}^{\Pi}_{\mathit{fin}} := \big\{ \underline{e} = \big(e_i\big)_{i \in \mathcal{I}} \in \mathbb{Z}^{\Pi} \;\big|\; e_i = 0 \text{ per quasi tutti gli } i \in \mathcal{I} \big\}$$

Dimostrare che il gruppo moltiplicativo $\big(Q(D)^* \,;\, \cdot\big)$ del campo $Q(D)$ è isomorfo al prodotto diretto $U(D) \times \mathbb{Z}^{\Pi}_{\mathit{fin}}$.

6 — Si consideri il dominio unitario $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big]$ e in esso l'insieme

$$\mathcal{T} := \big\{ \zeta \in \mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big] \;\big|\; N(\zeta) = 9 \big\}$$

dove N è la norma in $\mathbb{C}$, che per ogni $\zeta = a + b\sqrt{-5} \in \mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big]$ vale ovviamente $N(\zeta) = N\big(a + b\sqrt{-5}\,\big) = a^2 + 5\,b^2$. Dimostrare che:

(a) $\mathcal{T} := \big\{ 3\,,\, -3\,,\, \big(2+\sqrt{-5}\,\big)\,,\, \big(-2-\sqrt{-5}\,\big)\,,\, \big(2-\sqrt{-5}\,\big)\,,\, \big(-2+\sqrt{-5}\,\big) \big\}$;

(b) ogni elemento di $\mathcal{T}$ è irriducibile ma *non* è primo;

(c) $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big]$ è un dominio atomico;

(d) $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big]$ *non* è un dominio a fattorizzazione unica;

(e) $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big]$ *non* è un dominio di Bézout;

(f) $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big]$ *non* è un dominio con M.C.D.

7 — Sia D un dominio con MCD. Dimostrare che il MCD gode della "proprietà associativa", nel senso che per ogni $a_1,\, a_2,\, a_3 \in D^* := D \setminus \{0_D\}$ si ha

$$MCD\big(MCD(a_1,a_2),a_3\big) \sim MCD\big(a_1, MCD(a_2,a_3)\big)$$

così che, in generale, resta ben definito (a meno di invertibili) il $MCD(a_1, a_2, \dots, a_k)$.

8 — Dimostrare che in un dominio di Bézout ogni ideale che sia finitamente generato è necessariamente principale.

9 — Nell'anello $\mathbb{Z}[\,i\,]$ degli interi di Gauß, calcolare $MCD(a,b)$ ed una identità di Bézout per esso quando $a := 4+4\,i$ e $b := -5+7\,i$.

10 — Risolvere in $\mathbb{Q}[x]$ l'equazione diofantea

$$\big(x^3-x^2+4\,x-2\big)\,h(x) \;+\; \big(x^2-2\,x+3\big)\,k(x) \;=\; 15$$

nelle incognite $h(x)\,,\,k(x)\in\mathbb{Q}[x]$.

11 — Nel dominio unitario $\mathbb{Z}\big[\sqrt{8}\,\big]$, determinare quali tra gli elementi $\big(1+3\sqrt{8}\,\big)$, $\big(4-\sqrt{8}\,\big)$, $\big(-21+8\sqrt{8}\,\big)$ siano (eventualmente) tra loro associati.

((*<u>Soluzione</u>:* $\big(1+3\sqrt{8}\,\big)\sim\big(-21+8\sqrt{8}\,\big)$))

12 — Si consideri il dominio unitario $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-11}\,\big]$.

(a) Dimostrare che $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-11}\,\big]$ è un dominio atomico.

(b) Dimostrare che $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-11}\,\big]$ *non* è un dominio a fattorizzazione unica.

(c) Determimare due fattorizzazioni in irriducibili (o "atomi") in $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-11}\,\big]$ tra loro *non equivalenti* per ciascuno dei due elementi 15 e 45 .

((*<u>Soluzione di (c)</u>:* $15 \;=\; 3\cdot 5 \;=\; \big(2+\sqrt{-11}\,\big)\cdot\big(2-\sqrt{-11}\,\big)$,
$45 \;=\; 3\cdot 3\cdot 2 \;=\; \big(1+2\sqrt{-11}\,\big)\cdot\big(1-2\sqrt{-11}\,\big)$))

13 — Nell'anello $\mathbb{Z}[\,i\,]$ degli interi di Gauß, si fattorizzino 168 e 3150 come prodotto di irriducibili (="atomi").

((*<u>Soluzione</u>:* $3150 \;=\; 3^2\cdot 7\cdot(1+i)\cdot(1-i)\cdot(1+2\,i)^2\cdot(1-2\,i)^2$,
$168 \;=\; (1+i)^3\cdot 3\cdot 7$))

14 — Nell'anello $\mathbb{Z}[\,i\,]$ degli interi di Gauß, si considerino l'ideale $I := \big(3-i\,,\,2-16\,i\big)$ e l'anello quoziente $A := \mathbb{Z}[\,i\,]\big/I$.

(a) Determinare un generatore dell'ideale I .

(b) Calcolare, se esiste, l'inverso $\overline{7+2\,i}^{\;-1}$ della classe $\overline{7+2\,i}\in\mathbb{Z}[\,i\,]\big/I$.

15 — Dimostrare che gli anelli quoziente

$$\mathbb{Z}[x,y,z]\big/\big(x\,y+1\,,\,x-y\big) \qquad \text{e} \qquad \mathbb{Z}[x,y,t]\big/\big(x\,t+1\,,\,x-y\big)$$

sono domini a fattorizzazione unica, e calcolarne i rispettivi gruppi delle unità.

16 — *Criterio per i Domini Euclidei:* Dato un dominio unitario A, definiamo iterativamente i seguenti sottoinsiemi di A:

$$V_{-1} := \{0_A\} \quad , \qquad V_n := \big\{\, b \in A \;\big|\; V_{n-1} \longrightarrow A/(b) \text{ è suriettiva} \,\big\} \bigcup \{0_A\} \qquad \forall\; n \in \mathbb{N} \;\; .$$

Dimostrare che:

(a) $\quad V_0 \setminus V_{-1} = U(A) \quad ;$

(b) $\quad V_\ell \subseteq V_t \qquad \forall\; \ell \leq t \text{ in } \mathbb{N} \quad ;$

(c) $\quad A$ è dominio euclideo $\iff \bigcup_{n=-1}^{+\infty} V_n = A \quad .$

((*Suggerimento per la "$\Longrightarrow$" in (c):* Supponendo che A sia dominio euclideo, siano $v_0 < v_1 < \cdots < v_{n-1} < v_n < v_{n+1} < \cdots$ *tutti* i diversi valori, in ordine strettamente crescente, assunti dalla valutazione $v : A^* := A \setminus \{0_A\} \longrightarrow \mathbb{N}$ di A. Si definiscano allora i sottoinsiemi $W_{-1} := \{0_A\}$, $W_n := \big\{\, r \in A^* \;\big|\; v(r) \leq v_n \,\big\} \bigcup \{0_A\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e si dimostri che $V_n = W_n$ per ogni $n \geq -1$. Da questo poi si ricavi che $\bigcup_{n=-1}^{+\infty} V_n = A$.))

17 — Usando il *Criterio* dato nell'esercizio 14 qui sopra, dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n > 2$ i domini unitari $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-n}\,\big]$ *non* sono domini euclidei.

((*Suggerimento:* Calcolare V_0 e V_1, e trarre poi le conclusioni dal risultato trovato...))