ESERCIZI DI ALGEBRA — CAUCHY, p–GRUPPI, SYLOW

N.B.: il simbolo ☡ contrassegna gli esercizi (relativamente) più complessi.

— $*$ —

1 — Sia p un primo e G un p–gruppo. Sia $N \trianglelefteq G$ un sottogruppo normale di G *non banale*. Dimostrare che N ha intersezione non banale con il centro $Z(G)$ di G.

2 — Sia p un primo e G un p–gruppo. Sia $N \trianglelefteq G$ un sottogruppo normale di G tale che $\big|N\big| = p$. Dimostrare che N è contenuto nel centro $Z(G)$ di G.

3 — Sia G un gruppo finito e sia p un primo che divida l'ordine di G. Sia poi $N \trianglelefteq G$ un p–sottogruppo normale di G *non banale*. Dimostrare che N è contenuto in ogni p–sottogruppo di Sylow di G.

4 — Sia G un gruppo finito. Per ogni primo p, si dimostri che l'intersezione I_p di tutti i p–sottogruppi di Sylow di G è un sottogruppo normale di G.

5 ☡ — Sia G un gruppo finito il cui ordine sia pari ma non divisibile per 4, cioè $2 \,\Big|\, \big|G\big|$ ma $4 \not\Big|\, \big|G\big|$. Dimostrare che esiste in G un sottogruppo normale di indice 2.

6 — Sia p un primo e sia $\mathcal{S}_p$ il gruppo simmetrico su p elementi. Calcolare il numero di p–sottogruppi di Sylow in $\mathcal{S}_p$.

7 — Dimostrare che ogni gruppo finito di ordine 15 è ciclico, dunque isomorfo a $\mathbb{Z}_{15}$.

8 ☡ — Sia G un gruppo finito di ordine 231. Dimostrare che esiste in G uno ed un solo sottogruppo K di ordine 11, e che inoltre tale K è normale ed è contenuto in $Z(G)$.

9 — Sia G un gruppo finito di ordine 385. Dimostrare che:

(a) esiste in G uno ed un solo sottogruppo K di ordine 11;

(b) esiste in G uno ed un solo sottogruppo C di ordine 7;

(c) il sottogruppo K di cui in *(a)* è caratteristico in G;

(d) il sottogruppo C di cui in *(b)* è caratteristico in G e centrale, cioè $C \subseteq Z(G)$.

10 — Sia G un gruppo di ordine 12. Dimostrare che esiste in G un 2–sottogruppo normale non banale.

11 — Classificare, a meno di isomorfismi, tutti i gruppi di ordine 21.

12 — Classificare, a meno di isomorfismi, tutti i gruppi di ordine 12. In particolare si precisi, nella classificazione ottenuta, in quali classi di isomorfismo rientrino i due gruppi (tra loro non isomorfi) $\mathbb{Z}_{12}$ e D_6.