ESERCIZI DI ALGEBRA
CAMPI (1)

N.B.: il simbolo ☡ contrassegna gli esercizi (relativamente) più complessi.

— ∗ —

1 — Sia A l'anello quoziente

$$A \;:=\; \mathbb{Z}[x,y,z]\Big/\big(\,x-2\,y+3\,,\;y+5\,,\;z^2-3\,y\,z-6\,,\;x+2\,\big) \quad .$$

Dimostrare che A è un campo.

2 — Per ciascuno dei seguenti elementi (in $\mathbb{C}$) determinare se sia algebrico o trascendente sul campo $\mathbb{Q}$: $\quad \alpha_1 := \dfrac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}} \;,\quad \alpha_2 := \sqrt{\pi} \;,\quad \alpha_3 := \dfrac{\pi}{\sqrt{2}+3} \;,$
$\alpha_4 := \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} \;,\quad \alpha_5 := e^2+e+1 \;.$

N.B.: si assume che π ed e sono *trascendenti* su $\mathbb{Q}$.

3 — Sia $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$ un'estensione di campi, sia $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 3$, e siano $b_1 := a^3+3\,a-1 \in \mathbb{K}$ e $b_1 := \frac{a^3-3\,a+2}{a-3} \in \mathbb{K}$. Dimostrare che a è algebrico sul campo $\mathbb{F}(b_1)$ e sul campo $\mathbb{F}(b_2)$.

4 — Sia $F \subseteq E$ un'estensione algebrica (di campi), e sia R un *sottoanello* di E contenente F. Dimostrare che allora R è necessariamente un campo.

Cosa succede invece se l'estensione $F \subseteq E$ è trascendente (cioè *non* algebrica)?

5 — Determinare il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ dell'elemento $\alpha := \sqrt[3]{15} - \sqrt{7}$.

6 ☡ — Si consideri l'estensione di campi $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}\big(\sqrt{2}\,,\sqrt{5}\,\big)$.

(a) Determinare un *elemento primitivo* dell'estensione — cioè un generatore del campo più grande $\mathbb{Q}\big(\sqrt{2}\,,\sqrt{5}\,\big)$ come estensione (semplice) del campo più piccolo $\mathbb{Q}$.

(b) Determinare tutti gli elementi $b \in \mathbb{Q}\big(\sqrt{2}\,,\sqrt{5}\,\big)$ tali che $b^2 \in \mathbb{Q}$.

(c) Determinare tutti gli elementi $c \in \mathbb{Q}\big(\sqrt{2}\,,\sqrt{5}\,\big)$ che abbiano grado 2 su $\mathbb{Q}$.

7 — Determinare il campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ per $f(x) := x^4-4\,x^2+2 \in \mathbb{Q}[x]$.

8 — Determinare il campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ per $f(x) := 2\,x^4-x^3-4\,x+2 \in \mathbb{Q}[x]$.

9 — Dato il polinomio $f(x) := 2x^4 - x^3 - 4x + 2$, determinare il suo campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ e su $\mathbb{R}$.

10 — Dimostrare che ogni estensione di campi, *la cui caratteristica sia diversa da 2*, di grado 2 è normale.