Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"
CdL in Matematica — a.a. 2013/2014

ALGEBRA 2

prof. Fabio GAVARINI

Sessione estiva anticipata — II appello
prova scritta del 12 Febbraio 2014

....

N.B.: (1) compilare il compito in modo <u>*sintetico*</u> *ma* **esauriente***, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile;*
(2) i punti contrassegnati con il simbolo ☡ vanno affrontati <u>*in seconda battuta*</u>.

.... $*$ ....

[1] — Sia G un gruppo di ordine 255 in cui esista un sottogruppo H di ordine 85. Dimostrare che:

(a) H è ciclico;
(b) H è sottogruppo *normale* di G;
(c) G stesso è ciclico.

[2] — Sia A un anello, e sia G un gruppo che agisce su A per automorfismi, cioè tramite un morfismo di rappresentazione $G \longrightarrow Aut_{\mathcal{A}}(A)$ da G stesso al gruppo $Aut_{\mathcal{A}}(A)$ degli automorfismi di A (come anello).

Dimostrare che l'insieme $A^G := \big\{ a \in A \,\big|\, g.a = a \,,\ \forall\, g \in G \big\}$ è un sottoanello di A.

[3] — Determinare la struttura ciclica (secondo i due teoremi di classificazione dei gruppi abeliani finiti) di ciascuno dei due gruppi $U\big(\mathbb{Z}_{15}\big)$ e $U\big(\mathbb{Z}_{30}\big)$. Dedurne che tali gruppi sono isomorfi l'uno con l'altro, e determinare un isomorfismo (di gruppi) esplicito da $U\big(\mathbb{Z}_{30}\big)$ a $U\big(\mathbb{Z}_{15}\big)$.

[4] — Sia $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big] := \big\{ z \in \mathbb{C} \,\big|\, \exists\, a, b \in \mathbb{Z} : z = a + b\sqrt{-5} \,\big\}$.

(a) Dimostrare che $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big]$ è un sottoanello di $\mathbb{C}$.
(b) Determinare se l'ideale $\big(3\,, \sqrt{-5} - 1\big)$ in $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big]$ sia principale oppure no.
(c) Determinare se $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big]$ sia un dominio atomico (= a fattorizzazione) oppure no.
(d) Determinare se $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big]$ sia un dominio a fattorizzazione unica oppure no.
(e) Determinare se $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big]$ sia un dominio euclideo oppure no.
(f) Determinare se $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big]$ sia un dominio di Bézout oppure no.

[5] — Si consideri il polinomio $f(x) := 2\,x^4 - x^3 - 4\,x + 2 \;\big(\in \mathbb{Q}[x] \subseteq \mathbb{R}[x]\big)$.

(a) Determinare il campo di spezzamento di $f(x)$ rispettivamente su $\mathbb{Q}$ e su $\mathbb{R}$.
(b) Determinare il gruppo di Galois di $f(x)$ rispettivamente su $\mathbb{Q}$ e su $\mathbb{R}$, dandone una descrizione il più accurata possibile.