Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"

CdL in Matematica — a.a. 2013/2014

ALGEBRA 2

prof. Fabio GAVARINI

Sessione autunnale — prova scritta del 3 Settembre 2014

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile;*

. . . . $*$ . . . .

[1] — Sia G un gruppo di ordine 245.

(a) Dimostrare che G è abeliano.

(b) Sapendo che il gruppo G è abeliano, determinare quale possa essere la sua struttura ciclica secondo il 1^0 *Teorema di Classificazione* e il 2^0 *Teorema di Classificazione* dei gruppi abeliani finiti.

[2] — Sia $G := \mathcal{S}_5$ il gruppo delle permutazioni sull'insieme di cinque elementi $X := \{1,2,3,4,5\}$, e sia $E := \mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X. Si consideri l'azione del gruppo G sull'insieme E data da

$$G \times E \longrightarrow E \quad , \qquad (\sigma\,, Y\,) \mapsto \sigma.Y := \big\{\sigma(y) \,\big|\, y \in Y\big\}$$

(a) Determinare (descrivendole) tutte le orbite dell'azione di G su E.

(b) Per ciascuna orbita $\mathcal{O}$ dell'azione di G su E, selezionare un particolare punto $\omega \in \mathcal{O}$ dell'orbita stessa e calcolarne lo stabilizzatore St_ω.

(c) Dimostrare che, per ciascuna scelta di un'orbita $\mathcal{O}$ (dell'azione di G su E) e di un elemento $\omega \in \mathcal{O}$ in essa, esiste una *diversa* orbita $\mathcal{O}'$ e un elemento $\omega' \in \mathcal{O}'$ in essa tale che $St_{\omega'} = St_\omega$.

[3] — Indicando con $R = \mathbb{Z}[\,i\,]$ l'anello degli interi di Gauss, si consideri l'applicazione

$$\varphi : \mathbb{Z}[\,i\,] \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \,, \qquad a + i\,b \mapsto \varphi(a+ib) := [a+b]_2 \qquad \big(\forall\, a + i\,b \in \mathbb{Z}[\,i\,]\big)$$

(a) Dimostrare che φ è un morfismo di anelli.

(b) Calcolare $Ker(\varphi)$, e determinare se si tratti di un ideale di tipo

(b.1) principale, *(b.2)* primo, *(b.3)* massimale.

[4] — Sia $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-11}\,\big] := \big\{\, \zeta \in \mathbb{C} \;\big|\; \exists\, a, b \in \mathbb{Z} : \zeta = a + b\sqrt{-11}\,\big\}$.

(a) Dimostrare che $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-11}\,\big]$ è un sottoanello di $\mathbb{C}$.

(b) Determinare se $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-11}\,\big]$ sia un dominio di integrità.

(c) Determinare se $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-11}\,\big]$ sia un dominio a fattorizzazione unica.

(d) Determinare se $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-11}\,\big]$ sia un dominio a ideali principali.

(e) Determinare se $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-11}\,\big]$ sia un dominio euclideo.

(f) Determinare se esista un elemento di $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-11}\big]$ che ammetta una fattorizzazione in elementi irriducibili che però *non* siano primi.

[5] — Sia $\mathbb{Z}_5(\alpha)$ un'estensione finita semplice del campo $\mathbb{Z}_5$ con generatore α tale che $\alpha^4 = 2\,\alpha + 1$.

(a) Dimostrare che $\big[\,\mathbb{Z}_5(\alpha) : \mathbb{Z}_5\,\big] = 4$.

(b) Determinare quante radici abbia in $\mathbb{Z}_5(\alpha)$ il polinomio $x^2 + x + 2$.

(c) Determinare quanti e quali siano i campi $\mathbb{F}$ tali che $\mathbb{Z}_5 \subseteq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{Z}_5(\alpha)$.