ALGEBRA 2 — 2007/2008

Prof. Fabio Gavarini

Sessione estiva anticipata — prova scritta del 26 Febbraio 2008

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma esauriente, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

. . . . $*$ . . . .

[1] — Si consideri il polinomio $f(x) := x^6 + x^4 - 4\,x^2 - 4 \in \mathbb{Q}[x]$, e sia $\mathbb{Q}_f$ il campo di spezzamento di $f(x)$ su $\mathbb{Q}$.

(a) Determinare esplicitamente il campo $\mathbb{Q}_f$, e in particolare calcolare il grado dell'estensione $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}_f$ ed una sua base.

(b) Calcolare esplicitamente il gruppo di Galois $G(f)$ dell'estensione $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}_f$.

(c) Stabilire se il polinomio $f(x)$ sia risolubile per radicali oppure no.

[2] — Sia D un dominio unitario a ideali principali, che non è un campo. Sia I un ideale di D, con $I \neq \{0\}$.

Dimostrare che

$$I \text{ è massimale} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\ d \in D : I = (d)\,,\ d \text{ è irriducibile.}$$

[3] — Sia $\mathbb{Z}_{42}$ l'anello degli interi modulo 42, e sia $U(\mathbb{Z}_{42})$ il sottoinsieme di $\mathbb{Z}_{42}$ costituito da tutti e soli gli elementi invertibili, *rispetto alla moltiplicazione*, di $\mathbb{Z}_{42}$.

(a) Considerato che $\big(U(\mathbb{Z}_{42});\,\cdot\,\big)$ è un gruppo (moltiplicativo) abeliano finito, determinarne la struttura ciclica, cioè trovare tutti i primi $p_1, p_2, \dots, p_s$ e tutti gli interi positivi

$$e_{1,1}, \dots, e_{1,h_1},\ e_{2,1}, \dots, e_{2,h_2},\ e_{3,1}, \dots, e_{s-1,h_{s-1}},\ e_{s,1}, \dots, e_{s,h_s}$$

tali che, considerando ogni $\mathbb{Z}_{{p_i}^{e_{i,j}}}$ come gruppo additivo, si ha un isomorfismo di gruppi

$$\big(U(\mathbb{Z}_{42});\,\cdot\,\big) \cong \mathbb{Z}_{{p_1}^{e_{1,1}}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{{p_1}^{e_{1,h_1}}} \times \mathbb{Z}_{{p_2}^{e_{2,1}}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{{p_s}^{e_{s,h_s}}}$$

(b - facoltativo) Per ogni primo p, calcolare tutti i p–sottogruppi di Sylow del gruppo moltiplicativo $\big(U(\mathbb{Z}_{42});\,\cdot\,\big)$.

[4] — Siano A e B due insiemi disgiunti. Siano $\mathcal{S}(A)$, $\mathcal{S}(B)$ e $\mathcal{S}\big(A \cup B\big)$ i gruppi simmetrici delle permutazioni su A, su B e su $A \cup B$ rispettivamente. Siano poi

$$\mathcal{S}_A^B := \Big\{\, \sigma \in \mathcal{S}\big(A \cup B\big) \,\Big|\, \sigma(A) = A \,\Big\}$$

$$\mathcal{S}_B^A := \Big\{\, \tau \in \mathcal{S}\big(A \cup B\big) \,\Big|\, \tau(B) = B \,\Big\}$$

Dimostrare che:

(a) $\mathcal{S}_A^B$ e $\mathcal{S}_B^A$ sono sottogruppi di $\mathcal{S}\big(A \cup B\big)$;

(b) $\mathcal{S}_A^B = \mathcal{S}_B^A$;

(c) $\mathcal{S}_A^B \cong \mathcal{S}(A) \times \mathcal{S}(B)$, cioè il gruppo $\mathcal{S}_A^B$ è isomorfo al prodotto diretto dei gruppi $\mathcal{S}(A)$ e $\mathcal{S}(B)$.