

ALGEBRA 2 — 2007/2008

Prof. Fabio Gavarini

Sessione estiva anticipata — prova scritta del 18 Febbraio 2008

.....

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma esauriente, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.

..... *

[1] — Per ciascuno dei valori $n \in \{675, 588\}$, si richiede di:

(a) determinare il numero di gruppi abeliani, a due a due non isomorfi, di ordine n ;

(b) per ciascuna classe di isomorfismo dei gruppi abeliani di ordine n , determinare esplicitamente uno dei gruppi nella classe.

[2] — Dimostrare che l'anello quoziente

$$R := \mathbb{Z}[x, y] / (2y^2 + xy + 3x - 8, y + x - 3)$$

è un dominio euclideo, ma non è un campo.

[3] — Per ciascuno dei valori $n \in \{36, 27\}$, si richiede di:

(a) Determinare se esista un campo \mathbb{F}_n tale che $|\mathbb{F}_n| = n$. In caso negativo si spieghi perché non esista; in caso affermativo, si costruisca esplicitamente un tale campo.

(b) Se un campo \mathbb{F}_n come in (a) esiste, determinare esplicitamente un generatore del suo gruppo moltiplicativo $(\mathbb{F}_n \setminus \{0\}; \cdot)$.

[4] — Dimostrare che un gruppo G tale che $|G| = 56$ ha almeno un sottogruppo normale non banale.

