

ALGEBRA 2 — 2007/2008

Prof. Fabio Gavarini

Sessione estiva — prova scritta del 17 Giugno 2008

.....

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma esauriente, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.

..... *

[1] — Si consideri l'anello quoziente $R := \mathbb{Z}[i]/(3 - i, 2)$.

(a) Calcolare tutti i divisori di zero di R .

(b) Determinare se esista in R l'inverso dell'elemento $\overline{2 + i}$.
In caso negativo, spiegare perché tale inverso non esista; in caso affermativo, calcolare esplicitamente tale inverso.

(c) Determinare se esista in R l'inverso dell'elemento $\overline{5 + i}$.
In caso negativo, spiegare perché tale inverso non esista; in caso affermativo, calcolare esplicitamente tale inverso.

[2] — Sia G un gruppo di ordine 20.

(a) Se G è abeliano, calcolarne esplicitamente la struttura (a meno di isomorfismi).

(b) Se G non è abeliano, determinare esplicitamente il numero dei suoi p -sottogruppi di Sylow, per ogni primo p .

(c) Costruire esplicitamente un gruppo G di ordine 20 non abeliano.

[3] — Sia G un gruppo, e sia A un sottogruppo normale di G che sia anche abeliano.

(a) Dimostrare che l'azione di G su sé stesso per coniugazione induce un'azione $(G/A) \times A \longrightarrow A$, $(\bar{g}, a) \mapsto \bar{g}.a$, del gruppo quoziente G/A sul gruppo A .

(b) Dimostrare che l'azione di cui in (a) è un'azione per automorfismi del gruppo A , cioè

$$\bar{g}.(a' \cdot a'') = (\bar{g}.a') \cdot (\bar{g}.a'') \quad \forall \bar{g} \in G/A, a', a'' \in A$$

[4] — Si consideri il polinomio $f(x) := (x^3 - 5)(x^3 + 7) \in \mathbb{Q}[x]$, e si indichino con \mathbb{Q}_f e G_f rispettivamente il campo di spezzamento e il gruppo di Galois di $f(x)$ su \mathbb{Q} .

(a) Descrivere esplicitamente l'estensione $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}_f$. In particolare, calcolarne il grado ed una base.

(b) Determinare la struttura di G_f come gruppo astratto.

(c) Descrivere esplicitamente G_f come gruppo di automorfismi dell'estensione $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}_f$.

(d) Determinare se il gruppo G_f sia risolubile oppure no.
