ALGEBRA 2 — 2007/2008

Prof. Fabio Gavarini

Sessione autunnale — prova scritta del 16 Settembre 2008

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma esauriente*, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo* in corsivo *con grafia leggibile.*

. . . . $*$ . . . .

[1] — Si consideri nel campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi il numero $\alpha := 5 - \left(\sqrt[3]{7}\right)^2$.

(a) Calcolare il polinomio minimo $f_\alpha(x) \in \mathbb{Q}[x]$ di α su $\mathbb{Q}$.

(b) Calcolare il campo di spezzamento $\mathbb{Q}_{f_\alpha}$ di $f_\alpha(x)$ su $\mathbb{Q}$.

(c) Calcolare il grado ed una base dell'estensione $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}_{f_\alpha}$.

(d) (facoltativo) Descrivere esplicitamente un automorfismo non banale dell'estensione $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}_{f_\alpha}$ (in altre parole, un elemento — diverso dall'identità — del gruppo di Galois dell'estensione), precisando la sua azione su una base dell'estensione.

[2] — Sia G un gruppo di ordine dispari, e sia N un sottogruppo normale di G di ordine 5.

(a) Dimostrare che N è contenuto nel centro di G.

(b) (facoltativo) Se si suppone invece che N abbia ordine 7, vale ancora il risultato analogo di *(a)*?

[3] — Si consideri l'anello quoziente

$$\mathbb{F} := \mathbb{Z}[x] \Big/ \big(7\,,\, x^3 - 5\,x + 1\big)$$

(a) Determinare se esiste in $\mathbb{F}$ l'elemento $\big(\overline{3 + x - 5\,x^4}\big)^{-1}$ inverso di $\big(\overline{3 + x - 5\,x^4}\big)$. In caso affermativo, lo si calcoli esplicitamente; in caso negativo, si spieghi perché esso non esista.

(b) Determinare se $\mathbb{F}$ è un campo oppure no.

(c) *(facoltativo)* Calcolare caratteristica e cardinalità di $\mathbb{F}$.

[4] — Sia p un numero primo, sia $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}\big/p\,\mathbb{Z}$ il campo con p elementi e sia $\mathbb{F}_p^* := \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$. Si consideri il gruppo di matrici (rispetto al prodotto righe per colonne)

$$T_2(\mathbb{F}_p) \;:=\; \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & c \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{F}_p^*\,,\; c \in \mathbb{F}_p \right\}$$

e i suoi sottoinsiemi

$$U_2(\mathbb{F}_p) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, c \in \mathbb{F}_p \right\},\; D_2(\mathbb{F}_p) := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{F}_p^* \right\}$$

(a) Dimostrare che $U_2(\mathbb{F}_p)$ e $D_2(\mathbb{F}_p)$ sono sottogruppi di $T_2(\mathbb{F}_p)$.

(b) Dimostrare che $U_2(\mathbb{F}_p)$ è un p–sottogruppo di Sylow di $T_2(\mathbb{F}_p)$, ed è normale.

(c) *(facoltativo)* Dimostrare che $T_2(\mathbb{F}_p) = D_2(\mathbb{F}_p) \ltimes U_2(\mathbb{F}_p)$, cioè $T_2(\mathbb{F}_p)$ è prodotto semidiretto di $D_2(\mathbb{F}_p)$ e $U_2(\mathbb{F}_p)$.

(d) *(facoltativo)* Se $\mathbb{F}_q$ è il campo finito con $q = p^n$ elementi, con p primo, e se $T_2(\mathbb{F}_q)$, $U_2(\mathbb{F}_q)$ e $D_2(\mathbb{F}_q)$ sono definiti in modo analogo a prima, valgono i risultati analoghi di *(a)*, *(b)* e *(c)*?