ALGEBRA 1 — 2008/2009

Prof. Fabio Gavarini

Test di valutazione in itinere dell'11 Dicembre 2008

. . . .

N.B.: *(1)* compilare il compito in modo sintetico ma rm esauriente, spiegando *chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*
(2) il simbolo contrassegna gli esercizi — forse — un po' più complessi.
(3) in ogni sezione, svolgere a piacere uno dei due esercizi (A o B) proposti.

. . . . $*$ . . . .

[1–A] — Nell'isomorfismo canonico

$$\mathbb{Z}_{91} \xrightarrow{\ \Phi\ } \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{13} \ , \qquad [z]_{91} \mapsto \Phi\big([z]_{91}\big) := \big([z]_7 \, , \, [z]_{13}\big)$$

calcolare l'unico $[x]_{91} \in \mathbb{Z}_{91}$ tale che $\Phi\big([x]_{91}\big) := \big([6]_7 \, , [-17]_{13}\big)$.

[1–B] — Risolvere il sistema di congruenze lineari in $\mathbb{Z}$

$$\begin{cases} 26 \cdot x \equiv 2 & (\text{mod } 21) \\ 7 \cdot x \equiv 19 & (\text{mod } 8) \\ 54 \cdot x \equiv 4 & (\text{mod } 5) \end{cases}$$

. . . . . . $*$ . . . . . .

[2–A] — Si consideri la relazione $\vdash$ su $\mathbb{Z}$ definita al modo seguente:

$$a \vdash b \iff \begin{cases} a \leq b & \forall \ b \geq 0 \\ a \geq b & \forall \ a, b < 0 \end{cases}$$

(a) Dimostrare che $\vdash$ è un ordinamento totale;

(b) determinare, se esiste, il minimo di $\big(\mathbb{Z} \, , \vdash\big)$;

(c) determinare se $\vdash$ sia un buon ordinamento.

[2–B] — Si considerino tre insiemi X, Y, Z e due applicazioni $f : Y \longrightarrow Z$ e $g : X \longrightarrow Z$.

(a) Determinare condizioni necessarie e sufficienti su f e g affinché esista un'applicazione $h : X \longrightarrow Y$ tale che $g = f \circ h$.

(b) Nel caso in cui l'applicazione h di cui in *(a)* esista, determinare condizioni necessarie e sufficienti — su f e su g — affinché essa sia unica.

(c) Siano $g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la funzione "parte intera", cioè la funzione definita da $g(x) := \max\big\{ n \in \mathbb{Z} \,\big|\, n \leq x \big\}$, e $f:\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la restrizione di g a $\mathbb{Q}$. Determinare un'applicazione $h:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}$ tale che $g = f \circ h$, *se esiste*; altrimenti, spiegare perché una tale h non esista.

$\cdots\cdots \quad * \quad \cdots\cdots$

[3–A] — Calcolare il resto della divisione per 25 del numero

$$N \;:=\; 39714612507^{280951473}$$

[3–B] — Calcolare, se esistono, tutte le soluzioni in $\mathbb{Z}$ delle equazioni diofantee

$$35\,x - 14\,y \;=\; 13 \quad , \qquad 6\,x + 21\,y \;=\; 51$$

$\cdots\cdots \quad * \quad \cdots\cdots$

[4–A] — Sia $\big(E\,,\preceq\big)$ un insieme totalmente ordinato — cioè la $\preceq$ è una relazione d'ordine totale in E — e siano

$$\begin{aligned} G_+(E) \;&:=\; \big\{\, \sigma \in \mathcal{S}(E) \,\big|\, (x \preceq y) \Rightarrow \big(\sigma(x) \preceq \sigma(y)\big) \,\big\} \\ G_-(E) \;&:=\; \big\{\, \sigma \in \mathcal{S}(E) \,\big|\, (x \preceq y) \Rightarrow \big(\sigma(y) \preceq \sigma(x)\big) \,\big\} \\ G(E) \;&:=\; G_+(E) \cup G_-(E) \end{aligned}$$

dove $\mathcal{S}(E)$ è l'insieme delle permutazioni di E.

(a) Dimostrare che $G(E)$ è un sottogruppo di $\big(\mathcal{S}(E)\,;\circ\big)$.

(b) Dimostrare che $G_+(E)$ è un sottogruppo di $G(E)$.

(c) Dimostrare che $G_-(E)$ *non* è un sottogruppo di $G(E)$.

(d) Calcolare $G(E)$ per $\big(E\,,\preceq\big) := \big(\mathbb{Z}\,,\leq\big)$.

[4–B] — Sia $\big(G\,;\star\big)$ un gruppoide, e sia $Aut(G)$ l'insieme degli *automorfismi* di $\big(G\,;\star\big)$, cioè

$$Aut(G) \;:=\; \mathcal{S}(G) \bigcap \big\{\, morfismi\ di\ \big(G\,;\star\big) \big\}$$

dove $\mathcal{S}(G)$ è l'insieme delle permutazioni di G.

(a) Dimostrare che $Aut(G)$ è un sottogruppo di $\big(\mathcal{S}(G)\,;\circ\big)$.

(b) Calcolare $Aut(G)$ per il gruppo $\big(G\,;\star\big) = \big(\mathbb{Z}\,;+\big)$.