Algebra 1

(Prof. F. Brenti)

Test di Autovalutazione

(4 Novembre, 2015)

1. Siano A, B, C insiemi. È sempre vero che, allora
$$A\Delta(B \cup C) = (A\Delta B) \cup (A\Delta C)?$$

2. Sia R la relazione su $\mathbf{Q}$ definita ponendo aRb se e solo se $a - b \in \mathbf{Z}$ (dove $\mathbf{Q}$ sono i numeri razionali e $\mathbf{Z}$ sono i numeri interi). Decidere se R è una relazione di equivalenza, e, in caso affermativo, descrivere l'insieme quoziente $\mathbf{Q}/R$.

3. Trovare tutte le classi di resto $[x]_{130}$ tali che
$$[x]_{130}[18]_{130} = [60]_{130}.$$

4. Sia $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ la funzione definita ponendo
$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ 3n+1 & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$
per ogni $n \in \mathbf{N}$. Questa funzione è iniettiva? È suriettiva ? (La funzione f è legata ad un famoso problema aperto: È vero che applicando ripetutamentte la funzione f ad un qualsiasi $n \in \mathbf{N}$ prima o poi si ottiene il numero 1 ? Questa e' la Congettura del $3n + 1$)

5. Siano $p, a, b \in \mathbf{P}$, p primo, tali che $p|ab$. Dimostrare che, allora, o $p|a$ o $p|b$. Indicare tutti i punti della dimostrazione dove si usa l'ipotesi che p è primo. Mostrare con un esempio che il risultato non è vero se p non è primo.

6. Calcolare il MCD di 192 e 34 e trovare la corrispondente identita' di Bezoút.