ESERCIZI SU

INDUZIONE, SCRITTURA POSIZIONALE

N.B.: il simbolo contrassegna gli esercizi (relativamente) più complessi.

— ∗ —

1 — Dimostrare per induzione le seguenti identità:

(a) $\sum_{k=0}^{n} k \;=\; \frac{n\,(n+1)}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

(b) $\sum_{h=0}^{n} h^2 \;=\; \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

(c) $\sum_{t=0}^{n} t^3 \;=\; \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

2 — Dimostrare per induzione le seguenti identità:

(a) $\sum_{k=1}^{n}(2\,k-1) \;=\; n^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

(b) $\sum_{h=0}^{n}(4\,h+1) \;=\; (2\,n+1)\,(n+1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

3 — Dimostrare per induzione, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la seguente identità:

$$\sum_{s=0}^{n} s\,(s+1) \;=\; \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{3}$$

3 — Dimostrare per induzione, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la seguente diseguaglianza:

$$(n-3)^2 \;\lneqq\; n^2+11$$

4 — Dimostrare, per induzione su n, che $3^{2\,n+1}+2^{n+2}$ è multiplo (intero) di 7 (per ogni $n \in \mathbb{N}$).

5 — Dimostrare, facendo induzione su $n := k-h$, che per ogni $h,k \in \mathbb{N}_+$ tali che $h<k$ vale la seguente catena di diseguaglianze (strette):

$$h^2 \;<\; h\,k \;<\; k^2$$

6 — Siano A un insieme e $\underline{2}^A$ il corrispondente insieme delle funzioni caratteristiche in A. Dimostrare per induzione che se A possiede n elementi allora $\underline{2}^A$ possiede 2^n elementi.

7 — Sia A un insieme, e sia $\mathcal{P}(A)$ il corrispondente insieme delle parti di A. Dimostrare per induzione che se A possiede n elementi allora $\mathcal{P}(A)$ possiede 2^n elementi.

8 — Sia $n := [9873]_{10}$, cioè n è il numero naturale che in base dieci è espresso dalla scrittura posizionale $n = [9873]_{10}$. Scrivere n in base otto e in base sette.

Soluzione: $n = [23221]_8$, $n = [40533]_7$.

9 — Convertire in base dieci (cioè riscriverli usando la notazione posizionale in base dieci) i numeri n' e n'' espressi da $n' := [7503]_8$ e $n'' := [40213]_5$ rispettivamente in base otto e in base cinque.

Soluzione: $n' = [3907]_{10}$, $n'' = [2558]_{10}$.

10 — *Conversioni facili* $\left(b \rightsquigarrow b^r\right)$*:* Sia n il numero naturale che in base due è espresso dalla scrittura posizionale $n = [1011000110]_2$. Scrivere n in base quattro.

Soluzione: $n = [23012]_4$.

11 — *Conversioni facili* $\left(b \rightsquigarrow b^r\right)$*:* Sia n il numero naturale che in base due è espresso dalla scrittura posizionale $n = [11010111011]_2$. Scrivere n in base otto.

Soluzione: $n = [3273]_8$.

12 — *Conversioni facili* $\left(b^s \rightsquigarrow b\right)$*:* Sia n il numero naturale che in base quattro è espresso dalla scrittura posizionale $n = [30213]_4$. Scrivere n in base due.

Soluzione: $n = [1100100111]_2$.

13 — *Conversioni facili* $\left(b^s \rightsquigarrow b\right)$*:* Sia n il numero naturale che in base otto è espresso dalla scrittura posizionale $n = [73051406]_8$. Scrivere n in base due.

Soluzione: $n = [111011000101001100000110]_2$.

14 — *Conversioni facili* $\left(b^s \rightsquigarrow b \,\big/\, b \rightsquigarrow b^r\right)$*:* Sia n il numero naturale che in base otto è espresso dalla scrittura posizionale $n = [2351]_8$. Scrivere n in base due e in base quattro.

Soluzione: $n = [10011101001]_2$, $n = [103221]_4$.

15 — Trovare, se esiste, una base $b \in \mathbb{N}$ con $b > 5$, tale che $[523]_b = [303]_8$.

<u>Soluzione</u>: $\quad b = 6 \quad .$

16 — Usando la scrittura posizionale in base cinque, tramite le cinque cifre (ordinate!) 0, 1, 2, 3 e 4, calcolare — senza passare per la scrittura in base dieci — le somme $[1234]_5 + [2321]_5$ e $[3421]_5 + [4023]_5$. Come controprova, risolvere lo stesso problema convertendo prima in base dieci i numeri da sommare, calcolando la somma usando la scrittura posizionale in base dieci, e infine convertire (cioè riscrivere) in base dieci il risultato così ottenuto.

<u>Soluzione</u>: $\quad [1234]_5 + [2321]_5 = [4110]_5 \quad , \qquad [3421]_5 + [4023]_5 = [12444]_5 \quad .$

Per la controprova, si ha

$$[1234]_5 + [2321]_5 = [194]_{10} + [336]_{10} = [530]_{10} = [4110]_5 \quad ,$$
$$[3421]_5 + [4023]_5 = [486]_{10} + [513]_{10} = [999]_{10} = [12444]_5 \quad .$$

17 — Usando la scrittura posizionale in base $b =$ dodici, tramite le dodici cifre (ordinate!) dell'insieme $\{0, 1, 2, 3, \dots, 8, 9, \perp, \wedge\}$, calcolare — *senza* passare per la scrittura in base dieci... — la somma $[70\perp 31\wedge 5]_b + [497\wedge\perp 0\wedge]_b$.

<u>Soluzione</u>: $\quad [70\perp 31\wedge 5]_b + [497\wedge\perp 0\wedge]_b = [\wedge\perp 63004]_b \quad .$