ESERCIZI DI ALGEBRA 1
PARTE 1: INSIEMI, RELAZIONI, APPLICAZIONI

Definizioni.

(a) Per ogni insieme X*, indichiamo con* $\mathcal{P}(X)$ *l'insieme delle parti di* X*, con* $\mathcal{S}(X)$ *l'insieme delle permutazioni di* X *(cioè le applicazioni biunivoche di* X *in sé) e con* $|X|$ *la cardinalità di* X*.*

(b) $\underline{2} := \{0,1\}$.

(c) Dati due insiemi qualunque A *e* B*, scriviamo* $A \cong B$ *per indicare che esiste una applicazione* $f : A \longrightarrow B$ *che è biunivoca.*

(d) Dati due insiemi qualunque A *e* B*, indichiamo con* B^A *l'insieme di tutte le applicazioni con dominio* A *e codominio* B*, cioè* $B^A := \big\{ f \subseteq A \times B \,\big|\, f \text{ è un'applicazione} \big\}$.

(e) Dati due insiemi A *e* B *e data* $f \in B^A$ *, diremo che* f *è invertibile se esiste* $g \in A^B$ *tale che* $f \circ g = \mathrm{id}_B$ *e* $g \circ f = \mathrm{id}_A$ *. Una tale* g *è unica, e si indica con* f^{-1}*.*

(f) Dato un insieme E *ed* $f \in E^E$ *, definiamo induttivamente* f^n *per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *al modo seguente:* $f^0 := id_E$ *,* $f^{m+1} := f \circ f^m$ *per ogni* $m \in \mathbb{N}$ *.*

(g) Dati due insiemi X *e* Y *, il simbolo* $X \coprod Y$ *rappresenta l'unione disgiunta di* X *e di* Y *(in particolare, quindi,* X *e* Y *sono tra loro disgiunti).*

N.B.: gli esercizi proposti sono di difficoltà diversa; orientativamente, il simbolo contrassegna quelli (leggermente) più difficili.

1 — Siano A e B due insiemi qualunque, e sia $f \in B^A$. Dimostrare che f è invertibile se e soltanto se f è biunivoca.

2 — Siano A, B e C tre insiemi, e siano $\sigma \in B^A$ e $\tau \in C^B$. Dimostrare che:

(a) σ e τ suriettive $\implies$ $\tau \circ \sigma$ suriettiva;

(b) σ e τ iniettive $\implies$ $\tau \circ \sigma$ iniettiva;

(c) σ e τ biunivoche $\implies$ $\tau \circ \sigma$ biunivoca;

Dimostrare inoltre con un esempio (cioè *per qualche scelta particolare di* A*,* B*,* C*,* σ *e* τ) che *l'inverso di (a), (b) e (c) è falso*, cioè, in generale,

$$\tau \circ \sigma \text{ iniettiva (suriettiva, biunivoca)} \;\not\Longrightarrow\; \sigma \text{ e } \tau \text{ iniettive, (suriettive, biunivoche)}\,.$$

3 — Sia X un insieme finito. Dimostrare che $\big|\mathcal{P}(X)\big| = 2^{|X|}$, $\big|\underline{2}^X\big| = 2^{|X|}$, e infine $\mathcal{P}(X) \cong \underline{2}^X$. Determinare inoltre una biiezione esplicita tra $\mathcal{P}(X)$ e $\underline{2}^X$.

4 — Sia X un insieme finito. Dimostrare che $\big|\mathcal{S}(X)\big| = |X|!$

5 — Sia S un insieme finito e $f \in S^S$. Dimostrare che:

(a) f iniettiva $\Longrightarrow$ f suriettiva;

(b) f suriettiva $\Longrightarrow$ f iniettiva;

Dimostrare inoltre con un esempio (cioè *per qualche scelta particolare di* S e f) che *(a)* e *(b)* in generale *non valgono* se S è infinito.

6 — Dimostrare che la "relazione" $\cong$ tra insiemi data dalla Definizione *(d)* gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

7 — Dati due insiemi S e T, scriviamo

$$S < T \quad \overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} \quad \exists\, T \twoheadrightarrow S \quad \text{e} \quad \nexists\, S \twoheadrightarrow T\,.$$

Dimostrare che, se A, B, e C sono tre insiemi, allora: $A < B\,,\ B < C \implies A < C\,.$

8 — Siano $f,\, g \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ le applicazioni definite rispettivamente da $f(n) := n^2 - 5\,n + 1$ e $g(n) := n^2 - n + 2\,.$

(a) f è iniettiva? g è iniettiva?

(b) f è suriettiva? g è suriettiva?

(c) Calcolare tutte le classi di equivalenza per la relazione di equivalenza ρ_f associata a f e per la relazione di equivalenza ρ_g associata a g .

9 — Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $a_n := 2^{2^n} + 1$. Dimostrare che $a_n = a_0 a_1 \cdots a_{n-1} + 2$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

10 — Siano X, Y e Z tre insiemi, e siano $f \in Y^X$ e $g \in Z^Y$. Dimostrare che:

(a) Se f e g sono invertibili, allora anche $g \circ f$ è invertibile; calcolare allora $(g \circ f)^{-1}$ in funzione di f^{-1} e g^{-1} (vedi Definizione *(e)*);

(b) Se f e $g \circ f$ sono invertibili, allora anche g è invertibile; calcolare allora g^{-1} in funzione di f^{-1} e $(g \circ f)^{-1}$.

(c) Se g e $g \circ f$ sono invertibili, allora anche f è invertibile; calcolare allora f^{-1} in funzione di g^{-1} e $(g \circ f)^{-1}$.

11 — Sia $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\,,\ n \mapsto n^2\,.$

(a) Dimostrare che $\nexists\, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tale che $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}\,.$

(b) Calcolare due diverse funzioni $h,\, \ell \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tali che $h \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}} = \ell \circ f\,.$

12 — Studiare la relazione binaria ρ in $\mathbb{N}$ definita da

$$m \,\rho\, n \quad \overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} \quad m^2 - n = n^2 - m\,.$$

In particolare, qualora ρ sia una equivalenza, se ne calcolino le classi di equivalenza.

13 — *Esempio di dimostrazione sbagliata!*

Sia ρ una relazione (binaria) in un insieme E. Supponiamo che ρ sia *simmetrica* e *transitiva*. Allora, dati $x, y \in E$, abbiamo che

$$\begin{aligned} x \,\rho\, y \quad &\Longrightarrow \quad y \,\rho\, x && \text{(per la proprietà simmetrica)} \\ \big(x \,\rho\, y \ \text{ e } \ y \,\rho\, x \big) \quad &\Longrightarrow \quad x \,\rho\, x && \text{(per la proprietà transitiva)} \end{aligned}$$

e *quindi ρ è anche riflessiva!!!* ... dov'è l'<u>errore</u>?

14 — Sia E un insieme, e $f \in E^E$. Dimostrare che se f è iniettiva, allora anche f^n è iniettiva, per ogni $n \in \mathbb{N}$ (vedi Definizione *(f)*).

15 — Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

(a) $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2\,n+1)}{6}$$

(b) $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

(c) $$\sum_{h=1}^{n} h^5 + \sum_{\ell=1}^{n} \ell^7 = 2 \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^4$$

(d) $\big(n^2 - n\big)$ è pari.

16 — Siano A e B due insiemi qualunque. Dimostrare che

(a) $$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}\big(A \cap B\big)$$

(b) $$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}\big(A \cup B\big)$$

(c) $$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}\big(A \cup B\big) \quad \Longleftrightarrow \quad A \subseteq B \ \text{ oppure } \ B \subseteq A$$

17 — Dati $a, b, c \in \mathbb{Z}$, sia $\rho_{a,b,c}$ la relazione in $\mathbb{Z}$ definita da

$$x \,\rho_{a,b,c}\, y \overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} a\,x + b\,y = c \qquad \big(\forall\ x, y \in \mathbb{Z}\big)\,.$$

Determinare per quali terne $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ la relazione $\rho_{a,b,c}$ sia simmetrica oppure riflessiva.

18 — Descrivere esplicitamente tutti i movimenti rigidi di un esagono regolare.

19 — Sia E un insieme. Dimostrare che la corrispondenza (o relazione)

$$\sigma \;:=\; \big\{\, (X,Y) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \,\big|\, Y = \mathcal{C}_E(X) \,\big\}$$

è un'applicazione invertibile di $\mathcal{P}(E)$ in sé, e che inoltre $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(E)}$.

20 — Calcolare esplicitamente la corrispondenza biunivoca

$$\mathcal{P}(X) \lhook\joinrel\relbar\joinrel\twoheadrightarrow \underline{2}^X \;, \qquad Y \mapsto \chi_{{}_Y} \qquad \forall\; Y \in \mathcal{P}(X)$$

(dove $\chi_{{}_Y}$ è la funzione caratteristica del sottoinsieme Y, definita da $\chi_{{}_Y}(x) := 1 \;\forall\, x \in Y$, $\chi_{{}_Y}(x) := 0 \;\forall\, x \in X \setminus Y$) per l'insieme $X := \{\star\,,\, \bullet\,,\, \square\,\}$.

⊛ **21** — Dimostrare che l'intervallo aperto e limitato $(0\,;1) := \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x < 1 \,\}$ è equipotente a $\mathbb{R}$, cioè che $(0\,;1) \cong \mathbb{R}$.

⊛ **22** — Dimostrare che l'intervallo $(0\,;1) := \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x < 1 \,\}$ è equipotente al quadrato (aperto) $(0\,;1) \times (0\,;1)$, cioè che $(0\,;1) \cong (0\,;1) \times (0\,;1)$.

⊛ **23** — Dimostrare che $\mathbb{R}$ è equipotente a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, cioè che $\mathbb{R} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

⊛ **24** — Dimostrare che la retta euclidea, il piano euclideo e lo spazio euclideo sono tutti equipotenti gli uni agli altri.

25 — Per ogni $k \in \mathbb{N}_+ := \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sia p_k il numero delle partizioni di un qualunque insieme con k elementi *(N.B.: la definizione di p_k non dipende dalla scelta di un tale insieme! Perché?)*. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ vale la relazione $p_n = \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s} p_s$
(N.B.: per definizione, si ha $p_0 = 1$ e $p_1 = 1$).

26 — *("regole delle potenze" per insiemi di applicazioni)* Dimostrare che
$\big(A \times B\big)^C \cong A^C \times B^C$, $A^{B \coprod C} \cong A^B \times A^C$ per tutti gli insiemi A , B e C .

27 — Dimostrare che $A \cong B \Longrightarrow \mathcal{P}(A) \cong \mathcal{P}(B)$ per tutti gli insiemi A e B , mentre il viceversa è vero se e soltanto se A e B sono insiemi finiti.

28 — Dimostrare che esiste una partizione di $\mathbb{N}$ in un'infinità numerabile di sottoinsiemi numerabili. In altre parole, provare che esiste un'applicazione iniettiva $\sigma : \mathbb{N} \lhook\joinrel\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tale che $\mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sigma(n)$ e inoltre $\sigma(n) \bigcap \sigma(m) = \emptyset$ per ogni $n \neq m$.